

問題 8 物理数学(100点)

以下の問い(問1~問5)に答えよ。解答用紙には計算の途中経過も書くこと。

問1 任意の複素数 θ 及び、整数 n について、

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

であることを示せ。ただし、 i は虚数単位である。

問2 3次元直交座標系 (x, y, z) におけるベクトル場

$$\mathbf{b} = (x - y)\mathbf{i} + (x + y)\mathbf{j} + (xy)\mathbf{k}$$

について、以下の(1)~(4)を計算せよ。ただし、 \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} は直交座標系における x, y, z 方向の単位ベクトルである。

- (1) $\nabla \cdot \mathbf{b}$ (2) $\nabla \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{k})$
(3) $\nabla \times \mathbf{b}$ (4) $\nabla \times (\mathbf{b} \times \mathbf{k})$

問3 次の文を読んで、設問(1)~(3)に答えよ。

2次元直交座標系 (x, y) において、スカラー関数

$$V(x, y) = x^2 - \sqrt{5}xy + 3y^2$$

が与えられているとする。

(1) $\mathbf{F} = -\nabla V$ を計算し、次の関係式を満たす2行2列の行列 A を求めよ。

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

ただし、 F_x, F_y はそれぞれ \mathbf{F} の x 成分、 y 成分である。

(2) 行列 A の固有値と規格化された固有ベクトルを求めよ。

(3) 上記の固有ベクトルにより作成されたユニタリ行列 U を用いて

$$\begin{pmatrix} F'_x \\ F'_y \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

と変換するとき、 F'_x, F'_y を変換された x', y' を用いて表せ。

問4 次の微分方程式の一般解を求めよ。

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 4 \frac{dy}{dx} - 5y = 5x + 6$$

問5 次の定積分を計算せよ。

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$$