

2022年度
九州大学大学院理学府
修士課程地球惑星科学専攻
入学試験問題

(全15ページ)
(200点)

注意事項

- (1) 次の配布物が正しく配られていることを確認すること。
問題冊子 1冊
解答用紙 2枚
- (2) この問題冊子には、合計8題が出題されている。
問題1 地質学 問題2 古環境学・古生物学 問題3 岩石学・鉱物学
問題4 化学 問題5 熱力学 問題6 力学
問題7 電磁気学 問題8 物理数学
- (3) 第1志望・第2志望ともに、岩石循環科学，地球進化史，古環境学，惑星系形成進化学，有機宇宙地球化学，無機生物圏地球化学，地球惑星物質科学，地球惑星博物学の各研究グループを志望する受験生は，8問題のなかから任意に2問題を選択すること。
- (4) 第1志望または第2志望で，太陽地球系物理学，宇宙地球電磁気学，大気流体力学，気象学・気候力学，地球深部物理学，地球内部ダイナミクス，観測地震・火山学の各研究グループを志望する受験生は，問題5～問題8（上記の下線を引いた問題）のなかから少なくとも1問題を含む，合計2問題を選択すること。下線を引いた問題以外から2問題を選択した場合は，無効（0点）とするので注意すること。
- (5) 解答は，問題毎に別の解答用紙を用い，枠内に記入すること（裏面使用可）。
- (6) 二枚の解答用紙にそれぞれ，受験番号，氏名，選択した問題の番号を記入すること。
- (7) この問題冊子は持ち帰ってよい。

問題1 地質学 (100点)

以下の問い (問1, 問2) に答えよ。

問1 次の図1はある地域で作成された地質図である。この地域の地質に関する記述を読み、以下の設問 (1) ~ (8) に答えよ。

この地域には、A層 (礫岩)、B層 (砂岩・泥岩互層)、C層 (砂岩)、D層 (石灰岩) が分布している。B層、C層、D層はそれぞれ整合関係で接しており、褶曲や地層の逆転は認められない。地点Pでは、B層とC層の境界面の(a)走向と傾斜を測定することができた。またB層には(b)一方向流で形成された堆積構造が観察された。地点Rでは断層Fがみられ、(c)断層面や(d)粗粒の破碎岩片が固結した断層岩が観察された。

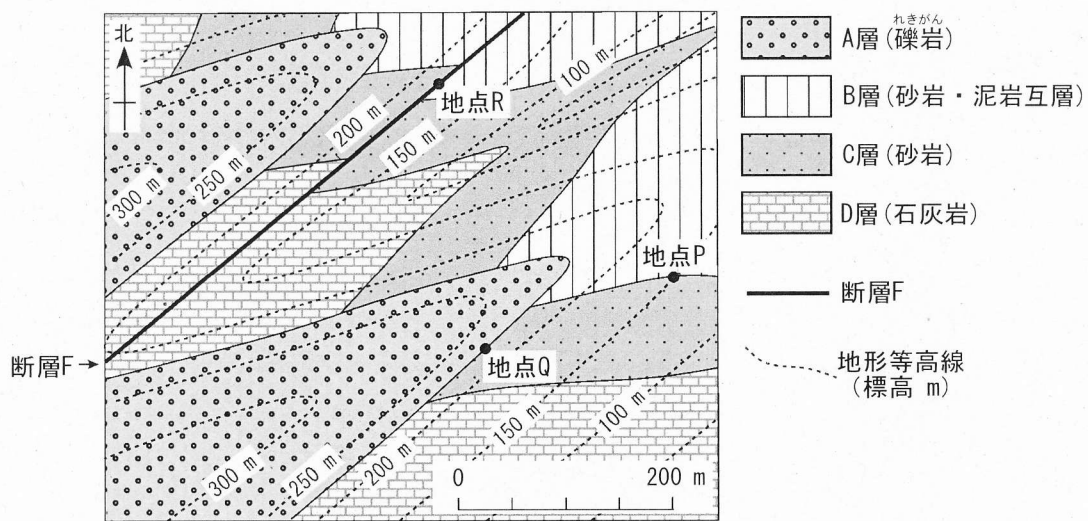


図1 作成された地質図

- (1) 下線部 (a) について、B層とC層の境界面の走向・傾斜の方向として最も適当なものを、それぞれの解答群から1つずつ選び、番号で答えよ。
 〈走向〉① 南—北 ② 北東—南西 ③ 東—西 ④ 北西—南東
 〈傾斜〉① 北 ② 北東 ③ 東 ④ 南東 ⑤ 南
 ⑥ 南西 ⑦ 西 ⑧ 北西
- (2) 図1中の地点Pから、真西に向かって水平にトンネルを掘ったところ、C層とD層の境界に到達した。地点Pから何 m でその境界に到着したか。最も適当なものを次の①~④の中から1つ選び、番号で答えよ。
 ① 100 m ② 150 m ③ 200 m ④ 250 m

(次ページに続く)

(問題 1 の続き)

- (3) 図 1 中の地点 Q では、A 層と C 層の境界露頭が確認された。この露頭で観察される A 層と C 層の接触関係を表す最も適切な用語を答えよ。
- (4) B 層の砂岩単層中には、地層の下部から上部へ向かい構成粒子の粒径が小さくなる構造が観察された。このような堆積構造の名称を答えよ。
- (5) 下線部 (b) に関して、一方向流により形成される堆積構造について、次の①～④の記述の中から正しいものを全て選び、番号で答えよ。
- ① 一方向流により形成された堆積構造としては、ヘリンボーン構造やハンモック状斜交層理などがある。
 - ② 中礫粒子を用いた水槽実験では、一方向流の流速を大きくしてもリップルは形成されない。
 - ③ 一方向流で形成されたリップルを特にウェーブリップルと呼ぶ。
 - ④ 炭酸塩堆積環境においては、一方向流によりバウンドストーンの堆積組織をもつ炭酸塩堆積物が形成される。
- (6) D 層について詳しく調べたところ、炭酸塩鉱物を構成する粒子は、主に微小な浮遊性生物の生物遺骸から構成されることが分かった。この浮遊性生物として適当なものの名称を 2 つ答えよ。
- (7) 下線部 (c) について、断層面の観察から断層の変位方向を推定する方法について説明せよ。説明には図を用いてよい。
- (8) 下線部 (d) のような特徴をもつ断層岩を何と呼ぶか答えよ。

問 2 次の 5 つの用語から 2 つを選び、それらについて 150 字以内で解説せよ。解答には図を用いてよい。

- ① タービダイト
- ② 永久歪
- ③ 層状チャート
- ④ 縞状鉄鉱層
- ⑤ 炭酸塩補償深度

問題2 古環境学・古生物学 (100点)

以下の問い(問1～問3)に答えよ。

問1 次の文を読んで設問(1)～(3)に答えよ。

化石は過去の生物の遺骸・痕跡であり、過去に生きた生物の存在を示す証である。化石の種類には、体化石のほかに(a) 印象化石や生痕化石などがある。ほとんどの化石は腐敗・分解しにくい硬組織が選択的に保存されたものであり、古生物の分類は基本的に化石(硬組織)の形態的特徴に基づいておこなわれる。分類の基本単位は種におかれ、近縁な種をまとめて属とし、さらに共通の特徴を持つ属をまとめて(ア)とする。同様に順次、高次の分類階級である、目、(イ)、(ウ)、界にまとめられる。近年は微生物についての知識が深まり、生物を(b) 3ドメイン(domains)に分類することが主流となっている。形態による化石生物の研究と、形態と遺伝子による現生生物の研究が結びつき、共通祖先から現生生物にいたる生物多様性の時間変化を示す生命の樹の概念が生まれた(図1)。

- (1) 下線部(a)について、印象化石と生痕化石の特徴をそれぞれ50字程度で説明せよ。
- (2) (ア)、(イ)、(ウ)に当てはまる分類階級を記せ。
- (3) 下線部(b)について、図1の生命の樹に示されたドメインA、ドメインB、ドメインCに当てはまる分類群の名称を記せ。

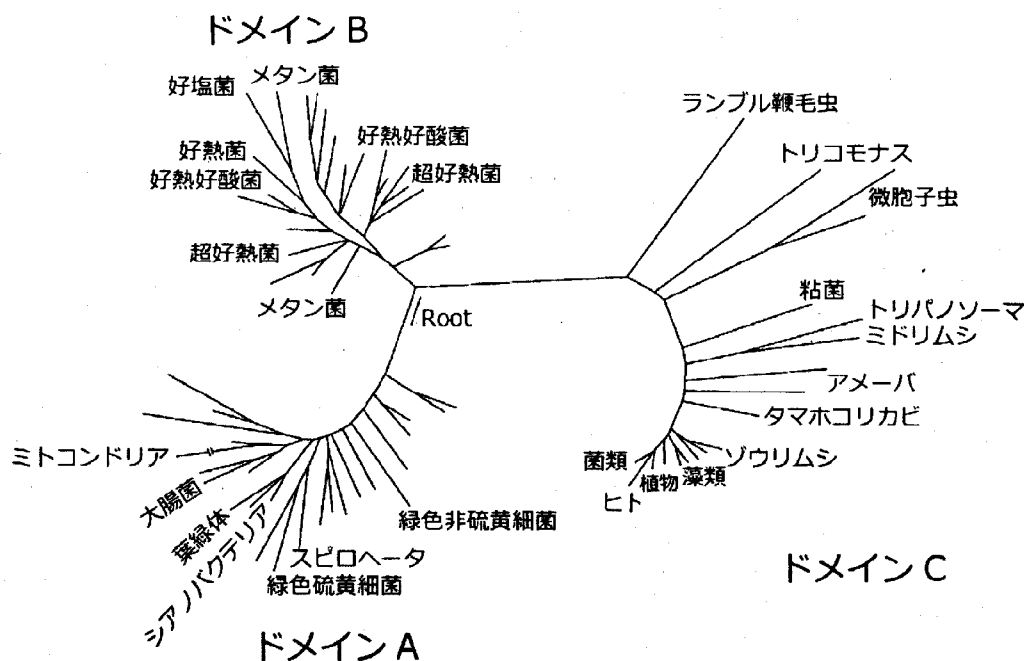


図1 遺伝子系統にもとづく生命の樹 (Pace, 1997 を改変)。共通祖先 (Root) から3つのドメインに分岐した。

(次ページに続く)

(問題 2 の続き)

問 2 次の 3 つの用語について、それぞれ 100 字以内で説明せよ。

- (1) 生層序 (biostratigraphy)
- (2) コノドント (conodont)
- (3) ゴンドワナ植物群 (Gondwana flora)

問 3 図 2 を見て次の設問 (1) ~ (3) に答えよ。

- (1) 底生有孔虫とはどのような生物か、50 字程度で説明せよ。
- (2) 図中左上の GSSP とは何か、100 字以内で簡潔に説明せよ。
- (3) 暁新世-始新世境界で起こった顕著な環境変動の概要を 100 字程度で説明せよ。



図 2 エジプト Dababiya セクションにおける後期暁新世から前期始新世の底生有孔虫群集の相対産出頻度と有機炭素の炭素安定同位体比の変化 (Keller et al., 2018 を改変)。右端の白三角が暁新世-始新世境界の層準を示す。下部に、各グラフに対応する底生有孔虫種の種名を示している。左下の黒い階段は、各底生有孔虫種の相対産出頻度グラフの横軸スケール (%) を表す。

問題3 岩石学・鉱物学 (100点)

以下の問い(問1, 問2)に答えよ。

問1 図1は1気圧でのディオプサイド(化学式は $\text{CaMgSi}_2\text{O}_6$), アノーサイト(化学式は $\text{CaAl}_2\text{Si}_2\text{O}_8$), メルトの3つの相の関係を示す相図である(破線は補助線)。以下の設問(1)~(4)に答えよ。ただし, A~Hは組成を表す。

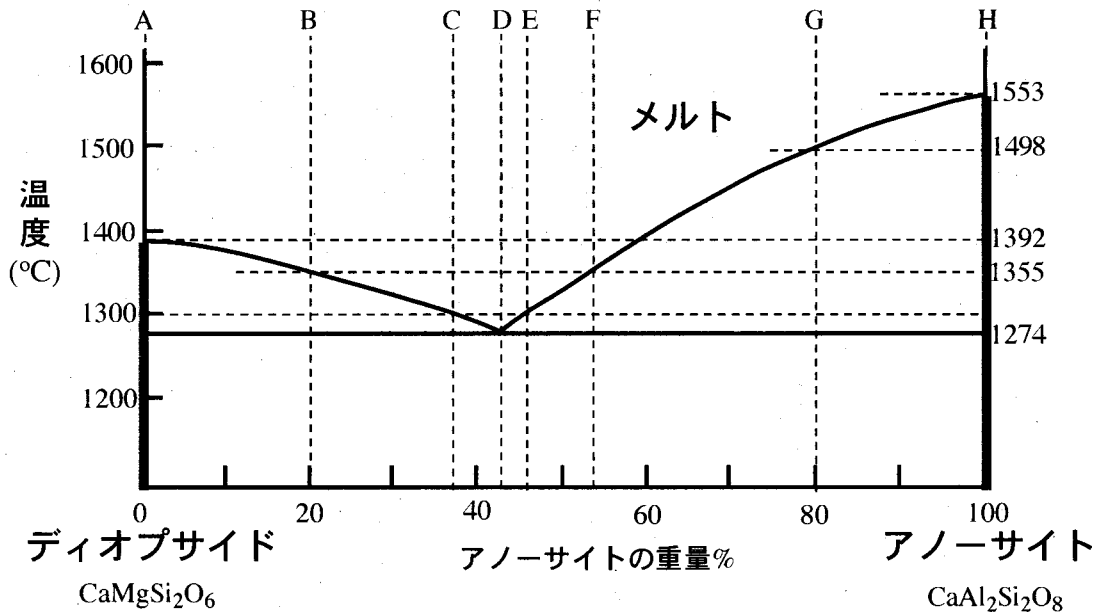


図1 1気圧での $\text{CaMgSi}_2\text{O}_6$ - $\text{CaAl}_2\text{Si}_2\text{O}_8$ の相図

- (1) デイオプサイドが80 wt%, アノーサイトが20 wt%の岩石が, メルトと共存する最低温度を答えよ。また共存するメルトの組成をA~Hの中から1つ選べ。
- (2) デイオプサイドが20 wt%, アノーサイトが80 wt%の岩石が, 閉鎖系ですべてメルトになる最低温度を答えよ。またそのメルトの組成をA~Hの中から1つ選べ。
- (3) (2)と同じ組成の岩石を1200 °Cから加熱し, 生じたメルトをその都度, 系から取り除く。系に残った岩石が完全に融解する最低温度を答えよ。またその温度で生成するメルトの組成をA~Hの中から1つ選べ。
- (4) 組成Fのメルトを閉鎖系で1600 °Cから冷却する。1300 °Cで共存する相を図中の3つの相の中から選び, その重量比を答えよ。重量比は図中のA~Hを用いて線分の長さの比で表せ(例えば, 線分AB:線分CD)。

(次ページに続く)

(問題3の続き)

問2 次の文章を読み、ディオプサイドとアノーサイトについて、設問(1)～(5)に答えよ。

鉱物の結晶は結晶軸の長さや結晶軸どうしのなす角度の特徴から、(A) 7つの結晶系に分類される。また、鉱物は(B) 化学組成に基づいても分類される。地殻やマントルを構成する大部分の鉱物はケイ酸塩鉱物に属し、(C) SiO₄四面体が結晶の基本的な骨組み(結晶構造)をつくっている。この四面体の中心(四面体席)を(D) Siだけでなく、一部をAlが占める鉱物もある。また、結晶構造の特定の場所(席)を占める(E) 陽イオンが別の陽イオンに置換され、化学組成が連続的に変化する鉱物もある。

- (1) 下線部(A)について、ディオプサイドとアノーサイトはそれぞれ単斜晶系、三斜晶系に属する。単斜晶系と三斜晶系の違いを説明せよ。
- (2) 下線部(B)について、化学式がCaAl₂Si₂O₈のアノーサイト中のAl₂O₃の重量パーセントを有効数字3桁で求めよ。途中の計算も示すこと。ただし、分子量をCaO = 56.08, Al₂O₃ = 101.96, SiO₂ = 60.08とする。
- (3) 下線部(C)について、化学式がCaMgSi₂O₆のディオプサイドではSiO₄四面体どうしがどのように結合しているか説明せよ。
- (4) 下線部(D)について、アノーサイトを構成するSiO₄四面体の4つの酸素は、それぞれ隣接する4つの四面体に共有される。(2)に示す化学式中の2つのAlのうち、四面体席を占めるAlの数を答えよ。また解答に至る過程も説明すること。
- (5) 下線部(E)について、ディオプサイドはヘデン輝石(化学式はCaFeSi₂O₆)との間に固溶体をなす。固溶体において、陽イオンが置換しうる条件を2つ挙げよ。

問題 4 化学 (100 点)

以下の問い(問1～問3)に答えよ。

問1 ハロゲン化アルカリの水への溶解度を表1に示す。設問(1)～(3)に答えよ。

表1 25°Cにおけるハロゲン化アルカリの水への溶解度 (mol kg⁻¹)

	Li ⁺	Na ⁺	K ⁺	Cs ⁺
F ⁻	0.051	0.99	17.50	24.04
Cl ⁻	20.00	6.15	4.81	11.30
I ⁻	12.51	12.26	8.92	

- (1) LiFの溶解度は低い。これは陽イオンと陰イオンのイオン半径が、両方とも小さいからである。表1で空欄となっているCsIの溶解度は、CsFやCsClの溶解度に比べて低いか高いか、理由をつけて答えよ。
- (2) 表1に示したLi⁺からCs⁺までの4つのアルカリ金属と過塩素酸イオン(ClO₄⁻)との塩の溶解度はどのような順になるか、理由をつけて答えよ。
- (3) フッ化銀AgFは水100gへの溶解度が180gと大きい。塩化銀AgClの水100gへの溶解度は0.00008gと小さい。過塩素酸銀AgClO₄はよく水に溶けることなども考慮すると、この溶解度の差は設問(1)で示した理由では説明できない。フッ化銀と塩化銀の溶解度の差はどのような性質により起こるか説明せよ。

問2 フッ化水素HFの水溶液にフッ化カリウムKFを溶かすとその水素イオン濃度は変化する。設問(1)、(2)に答えよ。

- (1) $1.0 \times 10^{-2} \text{ mol dm}^{-3}$ のフッ化水素水溶液の水素イオン濃度が $1.6 \times 10^{-3} \text{ mol dm}^{-3}$ であった。この時のフッ化水素の酸解離定数を有効数字2桁で求めよ。
- (2) 設問(1)の酸解離定数を用い、 1.0 dm^3 中に $1.0 \times 10^{-2} \text{ mol}$ のフッ化水素を含む水溶液に、 $2.0 \times 10^{-2} \text{ mol}$ のフッ化カリウムを加えた水溶液の水素イオン濃度を有効数字2桁で求めよ。フッ化カリウムは完全に解離するものとし、フッ化カリウムを加えた時の水溶液の体積変化は無視する。

(次ページに続く)

(問題4の続き)

問3 次の文を読んで、設問 (1) ~ (4) に答えよ。

放射性同位体 ^{14}C (半減期 5,730 年) は、大気中に含まれる気体成分の原子と太陽風由来の高エネルギー粒子との反応によって生成する。生じた ^{14}C は大気中で $^{14}\text{CO}_2$ となる。大気中の CO_2 は、植物が活着している間には植物体内に取り込まれるが、植物が活動を止めると取り込みが断たれ、植物体に固定された ^{14}C は放射壊変によって減少する。

炭素を含む試料について、安定同位体 ^{12}C と放射性同位体 ^{14}C の比 ($^{14}\text{C}/^{12}\text{C}$ 比) を測定し、大気中の CO_2 の $^{14}\text{C}/^{12}\text{C}$ 比を一定と仮定すれば、大気からの CO_2 取り込みの停止から、今までに試料が経験した時間を放射壊変の式に従って求めることができる。

- (1) 問題文中にある、 ^{14}C の生成の核反応式を示せ。
- (2) 上記の方法で求めた年代は、厳密には正確ではない。これは太陽活動や大気中の二酸化炭素濃度により、大気中の $^{14}\text{C}/^{12}\text{C}$ 比が一定でないからである。そこで実際の年代である暦年代を求めるための補正プログラムが作られている。その際用いられる試料を1つ示せ。
- (3) ある海洋深層水中の溶存無機炭素の $^{14}\text{C}/^{12}\text{C}$ 比は、同地域の表層水の溶存無機炭素の $^{14}\text{C}/^{12}\text{C}$ 比の 80% であった。深層水中の無機炭素の ^{14}C も、植物の場合と同様に放射壊変で減少すると仮定し、深層水と表層水との年代差を有効数字 2 桁で求めよ。必要ならば $\ln 2 = 0.69$, $\ln 3 = 1.10$, $\ln 5 = 1.61$ を用いてもよい。
- (4) 1950 年以降では、大気中の $^{14}\text{C}/^{12}\text{C}$ 比は大きく変わってしまった。それはなぜか答えよ。

問題5 熱力学 (100点)

以下の文章を読んで問い(問1~問3)に答えよ。計算の途中過程も書くこと。

問1 1モルの理想気体からなる2つの準静的熱サイクルを考える(図1)。以下の設問(1)~(4)に答えよ。ただし、それぞれの状態(A~F)における体積 V 、圧力 P 、温度 T は図中に与えられたものを使用し、 R は気体定数、 C_v は定積熱容量で温度依存性はないものとする。 Q' 、 Q_H は設問(4)を参照すること。

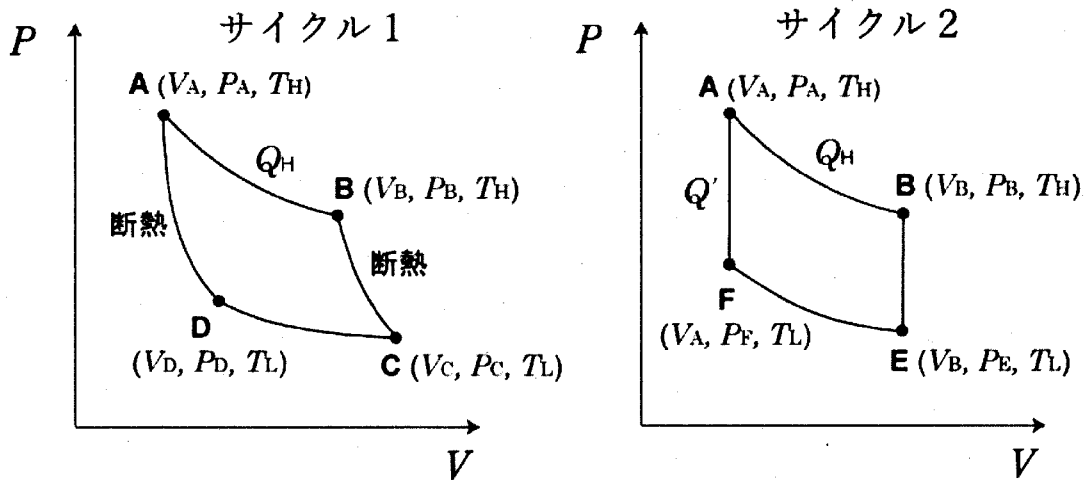


図1

- (1) サイクル1とサイクル2, それぞれについて, 横軸に体積 V , 縦軸に温度 T をとったグラフのおおよその形状を描け。
- (2) $A \rightarrow B$ の等温膨張過程で, それぞれのサイクルが外部になす仕事を求めよ。
- (3) サイクル1とサイクル2, それぞれについて, 横軸にエントロピー S , 縦軸に温度 T をとったグラフのおおよその形状を描け。
- (4) サイクルを時計まわりに1周するとき, 高温側の熱源 T_H からサイクル1では Q_H の熱を, サイクル2で $Q' + Q_H$ の熱を, それぞれ受け取る。行った仕事を W_1, W_2 とすると, サイクル1の効率 η_1 は W_1 / Q_H , サイクル2の効率 η_2 は $W_2 / (Q' + Q_H)$ とかける。 η_1, η_2 を $C_v, R, T_H, T_L, V_A, V_B$ から適当なものを組み合わせせて表せ。その後, η_1, η_2 の大小を比較せよ。

(次ページに続く)

(問題5の続き)

問2 等方的で一様な物質が物質質量を変えずに準静的な変化をするとき、内部エネルギー U の変化は $dU = T dS - P dV$ で表される。以下の設問 (1) ~ (3) に答えよ。

- (1) $\left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V$ と $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S$ をそれぞれ T, P のうち適切なものを使い表せ。
- (2) $\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$ と $\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V$ をそれぞれ C_V, T, P のうち適切なものを使い表せ。 C_V は定積熱容量とする。
- (3) $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T$ を T, P, V のうち適切なものを使い表せ。(ヒント：導出にはマックスウェルの関係式の一つを用いる)

問3 図2は蒸気圧曲線を示す。圧力 P_c 、温度 T_c において、すべてが液相となった状態を C_L 、すべてが気相となった状態を C_G とする。以下の設問 (1) ~ (4) に答えよ。

- (1) 物質質量、温度を変えずに準静的に状態 **A** から状態 **B** に移行すると液相から気相への相転移が起こる。このとき横軸に体積 V をとると、圧力 P 、ヘルムホルツの自由エネルギー F 、ギブスの自由エネルギー G は、それぞれどのようなグラフとして表されるか。3つのグラフのおおよその形状を描け。相転移直前の体積 (V_L とする) と相転移が終了した直後の体積 (V_G とする) が異なることに注意して描くこと。 $\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T$ がどのような熱力学量で表されるか考えて描くと良い。

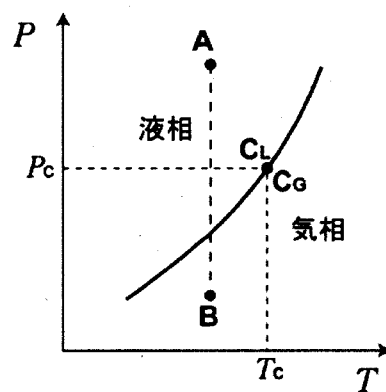


図2

- (2) C_L における内部エネルギー、エンタルピーをそれぞれ U_L, H_L とし、 C_G における内部エネルギー、エンタルピーをそれぞれ U_G, H_G とする。 $U_G - U_L$ と $H_G - H_L$ の大きさを比較せよ。両者に差があるとしたら何によるものか簡潔に述べよ。
- (3) C_G と C_L のエントロピーの差 $\Delta S = S_G - S_L$ を、 $U_L, U_G, H_L, H_G, P_c, T_c$ のうち適切なものを使い表せ。
- (4) 圧力 P_c 、温度 T_c における蒸気圧曲線の傾き $\frac{dP}{dT}$ を $P_c, T_c, \Delta V = V_G - V_L, \Delta U = U_G - U_L, \Delta H = H_G - H_L$ のうち適切なものを使い表せ。導出過程も書くこと。

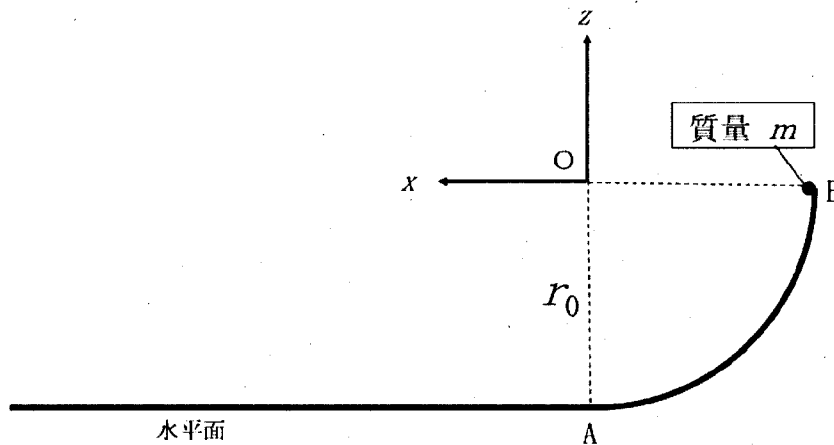
問題6 力学 (100点)

以下の問い(問1~問3)に答えよ。計算の途中経過も書くこと。

問1 次の文を読んで、設問(1)、設問(2)に答えよ。

下図のように鉛直上向きに z 軸, それと反時計回りに直交する水平方向に x 軸, 両者に直交するよう紙面手前に y 軸を取り, 原点 O を中心とする半径 r_0 の曲面が A 点 ($z = -r_0$) で水平面とつながっているものとする。大きさの無視できる質量 m の物体をこの曲面上の原点 O と同じ高さの点 B ($x = -r_0, y = 0, z = 0$) から静かに放した。ここでは大きさ g の重力加速度が $-z$ の向きに働いているとし, 面はなめらかで摩擦力は働かないものとする。

- (1) 物体を放した瞬間のこの物体に働く原点 O の周りのトルクを求めよ。
- (2) $x > 0$ における, 原点 O の周りの物体の角運動量を求めよ。



問2 質量 m の物体が地球中心からの距離 r の位置から速さ v_0 で地球に向かってきたとする。万有引力定数を G , 地球の半径を R , 地球の質量を M として, 地表に落ちてきた時の速さ v を求めよ。また, r が無限大で, $v \gg v_0$ で v_0 の大きさは無視できる場合の v を求めよ。ただし, 空気抵抗力, 他の星々との間の万有引力, 地球の運動の影響は受けないとする。

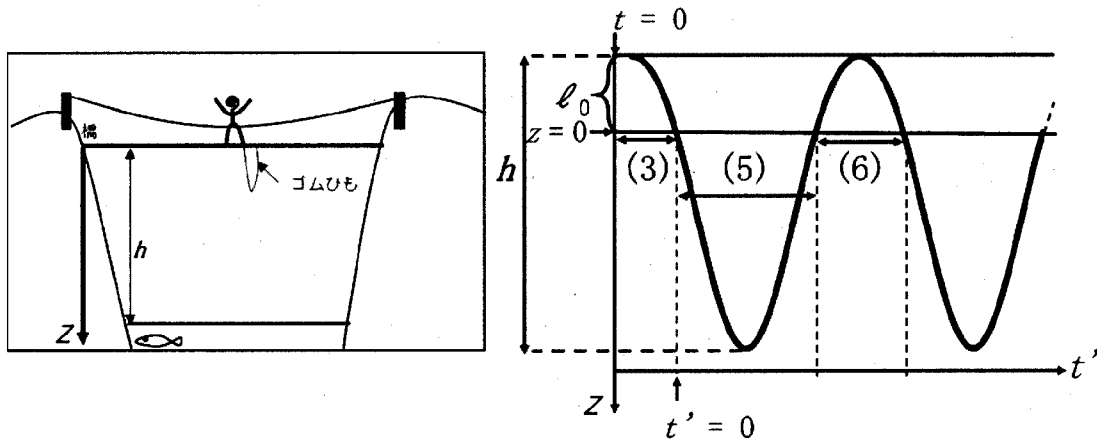
(次ページに続く)

(問題6の続き)

問3 バンジージャンプに関する次の文を読んで、設問(1)～(6)に答えよ。

ある人が水面からの高さ h の橋上から、足と橋をゴムひもで結び付けて静かに飛び降りたところ、水面の位置まで落ちて速度が0になった。図には鉛直方向下向きを z 軸に取ったバンジージャンプの模式図(左図)と時間を横軸に取ったこの人の位置(右図)を示す。ゴムひもは自然長 l_0 より伸びた時のみフックの法則に従い(ばね定数 k)、それ以外は力をおよぼさない。また、この人の体の大きさ、ゴムひもの質量、空気抵抗は無視でき、水平方向には動かないものとする。重力加速度の大きさを g とする。

- (1) この人の質量 m を h , l_0 , k , g のうち必要なものを用いて表せ。
- (2) この人の上下運動について、ゴムひもが自然長より長くなり始める位置を $z = 0$ として、運動方程式を示せ。
- (3) 飛び降りた時間を $t = 0$ としてこの人が $z = 0$ の位置に達するまでの時間(右図中(3)の時間)とその時の速度を求めよ。
- (4) この人は水面の位置まで達した後、ゴムひもにより水面から引っ張り上げられる。最初にゴムひもが自然長に達してからの時間を t' とし、次に $z = 0$ に達するまでの、この人の位置を t' の関数として表せ。
- (5) この人が $z = 0$ の位置を上から下に横切って再び下から上に横切る時間(右図中(5)の時間)を求めよ。
- (6) この人が $z = 0$ の位置を下から上に横切って再び上から下に横切る時間(右図中(6)の時間)を求めよ。



問題7 電磁気学 (100点)

以下の問い(問1～問4)に答えよ。

問1 次の文を読んで、設問(1)～(3)に答えよ。

- (1) 真空中のマクスウェル方程式：(a) 電場についてのガウスの法則，(b) 磁場についてのガウスの法則，(c) ファラデーの電磁誘導の法則，(d) アンペール-マクスウェルの法則の微分形を、国際単位系(SI)で記せ。その際、電場ベクトルは \mathbf{E} ，磁束密度ベクトルは \mathbf{B} ，電荷密度は ρ ，電流密度ベクトルは \mathbf{i} ，真空中の誘電率は ϵ_0 ，真空中の透磁率は μ_0 とせよ。
- (2) $\rho = 0$ ， $\mathbf{i} = \mathbf{0}$ として，(c)の式と(d)の式から \mathbf{E} を変数消去し， \mathbf{B} に対する波動方程式を求めよ。解答用紙には途中計算も記せ。
- (3) (2) で得た波動方程式に平面波の式 $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$ を代入して，この平面波の伝わる速さを求めよ。ただし， \mathbf{B}_0 と \mathbf{k} (波数ベクトル) は定数ベクトル， ω (角周波数) は定数， \mathbf{r} は位置ベクトル， t は時間とする。解答用紙には途中計算も記せ。

問2 磁束密度 B [T] の一様磁場中で，陽子が速さ v [m/s] でサイクロトロン運動している。陽子の速度の磁場平行成分はゼロとする。このとき，以下の設問(1)，設問(2)に答えよ。解答用紙には途中計算も記せ。

- (1) この陽子のサイクロトロン運動の周期 T [s] を， B ，陽子の質量 m [kg]，陽子の電荷 q [C] を用いて表せ。
- (2) $B = 4.8 \times 10^{-7}$ [T] の一様磁場中での陽子のサイクロトロン運動の運動エネルギーが $\mathcal{E} = 1.6 \times 10^{-14}$ [J] のとき， $m = 1.7 \times 10^{-27}$ [kg]， $q = 1.6 \times 10^{-19}$ [C] として，このサイクロトロン運動の半径 R [m] を求めよ。

問3 次の文を読んで，設問(1)，設問(2)に答えよ。

- (1) 線電荷密度 β で一様に帯電した長さ無限の直線を考える。この直線が作る電場の大きさ E の表式を，直線からの距離 r の関数として求めよ。解答用紙には途中計算も記せ。
- (2) 直交座標系の z 軸に平行な長さ無限の直線2本がある。1本目は線電荷密度が λ で $(0, 0, 0)$ の位置を通り，2本目は線電荷密度が 5λ で $(0, a, 0)$ の位置を通る (λ ， a は正の定数)。このとき，以下の設問(2a)，設問(2b)に答えよ。解答用紙には途中計算も記せ。
 - (2a) 1本目が2本目から受ける力 \mathbf{F} の3成分 F_x ， F_y ， F_z の表式を求めよ。
 - (2b) z 軸に平行な長さ無限の直線をもう1本置くことで，3本の直線のどれに加わるクーロン力もゼロであるようにしたい。その直線が通るべき xy 平面上の位置 (上記の例のように (x, y, z) の形で記せ) を求めよ。また，その直線の線電荷密度を求めよ。

(次ページに続く)

(問題7の続き)

問4 直交座標系の z 軸上にある無限に長い導線に、 z の正の向きに電流 I が流れている。この電流のうち $(0, 0, z')$ の位置の微小部分 dz' 上を流れる部分が xy 平面上の任意の位置 $(x, y, 0)$ に作るベクトルポテンシャル \mathbf{A} は、

$$\frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dz'}{\sqrt{x^2 + y^2 + z'^2}} \mathbf{e}_z$$

(ここに \mathbf{e}_z は z 方向単位ベクトル) である。このとき以下の設問 (1)、設問 (2) に答えよ。解答用紙には途中計算も記せ。

(1) 上記の式を用い、この電流のうち $z = -a$ から $z = b$ (a, b は定数で、 $a > 0, b > 0$ とする) を流れる部分が $(x, y, 0)$ に作るベクトルポテンシャル \mathbf{A} の 3 成分 A_x, A_y, A_z の表式を求めよ。途中計算においては、 $\frac{1}{\sqrt{x^2 + c^2}}$ (c は定数) の不定積分は $\ln(\sqrt{x^2 + c^2} + x)$ である事を用いても良い。

(2) (1) で求めた \mathbf{A} の表式から、上記の電流部分が位置 $P(d, 0, 0)$ に作る磁束密度の y 成分 B_y を求めよ。ただし、 d は定数で、 $d > 0$ とする。

問題 8 物理数学(100点)

以下の問い(問1~問5)に答えよ。解答用紙には計算の途中経過も書くこと。

問1 任意の複素数 θ 及び、整数 n について、

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

であることを示せ。ただし、 i は虚数単位である。

問2 3次元直交座標系 (x, y, z) におけるベクトル場

$$\mathbf{b} = (x - y)\mathbf{i} + (x + y)\mathbf{j} + (xy)\mathbf{k}$$

について、以下の(1)~(4)を計算せよ。ただし、 \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} は直交座標系における x, y, z 方向の単位ベクトルである。

- (1) $\nabla \cdot \mathbf{b}$ (2) $\nabla \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{k})$
(3) $\nabla \times \mathbf{b}$ (4) $\nabla \times (\mathbf{b} \times \mathbf{k})$

問3 次の文を読んで、設問(1)~(3)に答えよ。

2次元直交座標系 (x, y) において、スカラー関数

$$V(x, y) = x^2 - \sqrt{5}xy + 3y^2$$

が与えられているとする。

(1) $\mathbf{F} = -\nabla V$ を計算し、次の関係式を満たす2行2列の行列 A を求めよ。

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

ただし、 F_x, F_y はそれぞれ \mathbf{F} の x 成分、 y 成分である。

(2) 行列 A の固有値と規格化された固有ベクトルを求めよ。

(3) 上記の固有ベクトルにより作成されたユニタリ行列 U を用いて

$$\begin{pmatrix} F'_x \\ F'_y \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

と変換するとき、 F'_x, F'_y を変換された x', y' を用いて表せ。

問4 次の微分方程式の一般解を求めよ。

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 4 \frac{dy}{dx} - 5y = 5x + 6$$

問5 次の定積分を計算せよ。

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$$