問題10　力学（125点）

次の文を読み，以下の問い（**問１**、**問２**）に答えよ。

質量m_1の質点P_1、m_2の質点P_2が互いに力を及ぼしあいながらデカルト座標系(x, y)内を平面運動している場合を考える。この座標系は慣性系であるとする。P_1とP_2の位置をそれぞれ(x_1, y_1)及び(x_2, y_2)とし、P_1とP_2の距離をrとする。以下では、$r \neq 0$である場合に限ることにする。

問１　位置エネルギーがrの関数$V(r)$で与えられているとする。時間による1階微分を“･”、２階微分を“･･”、$V(r)$のrによる導関数を“$V'(r)$”で表すことにする。

（１）　質点P_1とP_2それぞれの運動方程式を、x方向及びy方向について各々記せ（全部で4つの方程式を記すこと）。

（２）　質点P_1とP_2の相対座標を$x = x_1 - x_2$、$y = y_1 - y_2$、換算質量を$\mu = m_1 m_2 /(m_1 + m_2)$で定義する。（１）で求めた４つの方程式から、次の２つの方程式が導出されることを証明せよ。

$$\mu \ddot{x} = -\frac{x}{r} V'(r) \quad \cdot\cdot\cdot ①$$

$$\mu \ddot{y} = -\frac{y}{r} V'(r) \quad \cdot\cdot\cdot ②$$

（３）　相対運動の力学的エネルギー$E = \dfrac{\mu(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{2} + V(r)$が保存することを①、②を用いて証明せよ。

（４）　相対運動の角運動量$J = \mu(x\dot{y} - y\dot{x})$が保存することを①、②を用いて証明せよ。

（次ページに続く）