

問題7 力学 (100点)

以下の問い (問1～問3) に答えよ。

問1 半径 a の滑らかな球面の頂上に置かれてあった質量 m の質点が、1つの鉛直面内の大円に沿って滑り出した (初速度は 0 と仮定する)。ただし、重力加速度を g 、質点と球の中心を結ぶ直線が鉛直上向きとなす角を θ とする。

- (1) エネルギー保存則を用いて、質点が球から離れる前の速さを θ の関数として表せ。
- (2) 質点が球から離れるときの $\cos \theta$ の値を求めよ。

問2 問1の滑らかな球面の代わりに、質点が途中で止まらない程度の摩擦がある球面を考える。その動摩擦係数を μ 、質点の速度を v とする。

- (1) 球面に沿った方向の運動方程式と、質点と球の中心を結ぶ直線方向 (法線方向) の力の釣り合いの式を立てよ。ただし、必要な変数、定数は自分で定義せよ。
- (2) (1) の式を変形すると、

$$\frac{dv^2}{d\theta} - 2\mu v^2 = 2ag(\sin\theta - \mu\cos\theta)$$

となることを示せ。

- (3) 問1における質点が球から離れるときの θ を θ_1 、問2における質点が球から離れるときの θ を θ_2 とする。問2(2)の式を解くことなく、物理的考察により、 θ_1 と θ_2 の大小関係について述べよ。

問3 問2の質点の代わりに内部の密度が一様な質量 m 、半径 b の小さな球を考える。半径 a の固定された球の頂上から半径 b の小球が転がり出したとする (初速度は 0 と仮定する)。ただし、2球の中心を結ぶ直線が鉛直上向きとなす角を θ とし、2つの球の間にすべりは全く起こらず、ころがり摩擦はないものとする。半径 b の小球の

その中心軸のまわりの慣性モーメントは $I = \frac{2}{5}mb^2$ と表される。

- (1) エネルギー保存の式と、2球の中心を結ぶ直線方向 (法線方向) の力の釣り合いの式を立てよ。ただし、必要な変数、定数は自分で定義せよ。
- (2) 半径 b の小球が半径 a の球から離れるときの $\cos \theta$ の値を求めよ。