

問題9 物理数学 (100点)

以下の問い (問1~問5) に答えよ。

問1 以下の線形微分方程式の一般解を求めよ。

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 6y = 0$$

問2 行列 $A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -7 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & -6 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ。固有ベクトルは規格化せよ。

問3 直交座標系における点Aの座標を $A(x, y, z)$ とする。 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ とし、ラプラシアン $\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right)$ を計算せよ。ただし $r \neq 0$ とする。

問4 留数定理を用い、以下の複素積分の値を求めよ。積分路は円周上の正の向きに1周するものとする。

$$I = \oint_{|z|=2} \frac{1}{(z^2+1)(z-3)} dz$$

問5 区間 $[-\pi, \pi]$ で区分的に滑らかな任意の関数 $f(x)$ は、直交関数系 $\{\cos mx, \sin mx\}$ によって、次のように Fourier 級数に展開可能である。

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos mx + b_m \sin mx)$$

$f(x) = |\sin x|$ を区間 $(-\pi \leq x \leq \pi)$ で Fourier 級数に展開せよ。