問題 6　熱力学 (100 点)

理想気体に関する以下の問い (**問 1**、**問 2**) に答えよ。

問 1 室温に近い、ある一定の温度 T に保たれている 1 原子分子の理想気体が及ぼす圧力 P と運動エネルギーを考える。x、y、z 方向の辺の長さが L の立方体中に、十分希薄な状態で N 個の分子が入っている。分子は立方体の壁と完全弾性衝突をし、単位時間当たりの運動量の変化が壁に力を及ぼし、圧力を生じると考える。以下の文章の (ア)〜(シ) 内に、最も適切な数式を入れて文章を完成せよ。結果のみ記せ。さらに問い **(1)**〜**(2)** に答えよ。

まず、一つの分子の、x が正の方向の運動を考える。分子の質量を m、速度成分を v_x とすると、一回当たりの衝突による運動量の変化は (ア) である。分子は、一方の壁に衝突してから次に同じ壁に衝突するまでの間に $2L$ の距離を運動するから、単位時間当たり壁に (イ) 回衝突することになる。単位時間当たりの運動量の変化を考えると、分子の衝突が壁に及ぼす力は (ウ) となる。これより、一分子の及ぼす、時間平均した単位面積当たりの力 p は、(ウ) を壁の面積 L^2 で割り、立方体の体積 $V(=L^3)$ と m、v_x を用いて、$p=$(エ) となる。立方体中の N 個の分子全体が及ぼす力の総和が P なので、p の N 個の分子に関する和から P を求めることができる。すなわち、N 個の分子の x 方向の速度成分の 2 乗平均を $\overline{v_x^2}$ とすると、$\Sigma v_x^2 = N\overline{v_x^2}$ とおけるので、$P=$(オ) である。同様に y 方向、z 方向の 2 乗平均速度 $\overline{v_y^2}$、$\overline{v_z^2}$ を考えると、$\overline{v_x^2}=\overline{v_y^2}=\overline{v_z^2}$ であるから、N 個の分子の速さの 2 乗平均 $\overline{v^2}$ は、$\overline{v_x^2}$ を用いて、$\overline{v^2}=$(カ) と表すことができる。したがって、$\overline{v^2}$ を用いれば、$P=$(キ) と表すことができる。一方で、モル数が n の理想気体に対する状態方程式は、気体定数 R を用いて、$P=$(ク) と表すことができる。両式を比較すると、アボガドロ定数を N_A として N を n と N_A で表せば、$N=$(ケ) なので、$RT=$(コ)、すなわち N_A 個の分子による運動エネルギーは RT の (サ) 倍ということになる。また、同様にこれをボルツマン定数 k を用いて表すと、kT の (シ) 倍になる。

(1) 上の結果を用いて、分子量 40 の気体分子が $\overline{v^2}=(400\mathrm{ms^{-1}})^2$ で運動しているときの気体の温度を求めよ。ただし $R=8.31\times10^3\mathrm{JK^{-1}kmol^{-1}}$、$N_A=6.02\times10^{26}\mathrm{kmol^{-1}}$ とせよ。

(2) 上の気体が箱の中に $10^9\mathrm{m^{-3}}$ の数密度で入っているとき、箱の内部の圧力を求めよ。

問 2 室温に近い温度 T の、アボガドロ定数個の分子からなる理想気体の内部エネルギー U に関する以下の問い **(1)**〜**(4)** に答えよ。室温では、分子の振動エネルギーは無視できるものとし、考え方も簡潔に記すこと。

(1) 定積モル比熱 c_v は U と T を用いてどのように表すことができるか。

(2) 問 1 で考えたような 1 原子からなる分子の場合、定積モル比熱 c_v は、R を用いてどのような式で表されるか。

(3) 2 原子分子の場合、エネルギー等分配の法則が成り立つとすると、定積モル比熱 c_v は、R を用いてどのような式で表されるか。

(4) 熱力学第一法則の式 $dU=\delta W+\delta Q$ を基に、準静的な断熱過程を考えた場合、ポアソンの法則 $TV^{(\gamma-1)}=$一定　が成り立つことを示せ。ただし、δW は加えた仕事、δQ は加えた熱、$\gamma=\dfrac{c_v+R}{c_v}$ とする。