

## 問題9 物理数学(100点)

時間  $t$ , 位置  $x$  に関する 1 次元の熱伝導方程式は

$$\frac{\partial T}{\partial t} = K \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (1)$$

で与えられる. ここで  $T$  は温度,  $K$  は温度伝導度であり正の定数とする.  
以下の問い (問1~問5) に答えよ. 答えに至る過程も示すこと.

**問1** 長さ  $2\pi$  の棒の定常温度分布について考える. 棒の両端  $x=0$  および  $x=2\pi$  で温度が一定温度  $T_1, T_2$  (境界条件(2)) に保たれている場合の棒の温度分布を求めよ.

$$T(0) = T_1, \quad T(2\pi) = T_2 \quad (2)$$

**問2** 両端での境界条件が,  $T(0,t) = T(2\pi,t)$  および  $T_x(0,t) = T_x(2\pi,t)$  (ここで  $T_x \equiv \frac{\partial T}{\partial x}$  である) を満たす(1)の解  $T(x,t)$  を  $T(x,t) = \Theta(t)X(x)$  と置き, 変数分離法によって求める. ただし変数分離定数を  $-k^2$  と置き  $k$  は0以上の実数とする.

(a)  $\Theta, X$  が従う常微分方程式はそれぞれ(3), (4)となることを示せ.

$$\frac{d\Theta}{dt} + k^2\Theta = 0 \quad (3), \quad \frac{d^2X}{dx^2} + \frac{k^2}{K}X = 0 \quad (4)$$

(b) (4)の一般解は  $X(x) = A \cos \frac{k}{\sqrt{K}}x + B \sin \frac{k}{\sqrt{K}}x$  で与えられることを示せ.

(c)  $X(x)$  が両端での境界条件を満足するための必要条件は,  $k = \sqrt{K}n$ , ( $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ ) であることを示せ.

**問3** 問2で求めたそれぞれの  $n$  に対応する一般解  $X_n(x)$  は積分定数を  $A_n, B_n$  とすると,

$$X_n(x) = A_n \cos nx + B_n \sin nx \quad (5)$$

で与えられる.  $X_n(x)$  と対になる時間成分の一般解  $\Theta_n(t)$  は  $\Theta_n(t) = C_n \exp(-Kn^2t)$  で与えられることを示せ. ここで  $C_n$  は積分定数である.

(次ページに続く)