

問題9 物理数学 (100点)

以下の問い (問1~問5) に答えよ。

問1 以下の微分方程式の一般解を求めよ。

$$\frac{dy}{dx} + 2y = e^{-x}$$

問2 以下の複素積分の値を求めよ。積分路は複素平面における円周上の正の向き (反時計まわり) に1周するものとする。

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{\cos z}{z} dz$$

問3 行列  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$  の固有値と固有ベクトルを利用して  $A^n$  を求めよ。  
ただし  $n$  は正の整数とする。

問4 3次元直交直線座標  $(x, y, z)$  系を考え、その基本ベクトルを  $i, j, k$  とする。  
ベクトル  $A = 2xz^2 i - yz j + 3xz^3 k$ 、スカラー  $\varphi = x^2 yz$  の時、以下の(a)~(d)の値を求めよ。 $\nabla \cdot A$  と  $\nabla \times A$  はベクトル場  $A$  の発散と回転で、 $\nabla \varphi$  と  $\nabla^2 \varphi$  はスカラー場  $\varphi$  の勾配とラプラシアンである。

(a)  $\nabla \cdot A$     (b)  $\nabla \times A$     (c)  $\nabla \varphi$     (d)  $\nabla^2 \varphi$

(次ページに続く)