問 5　時間 t，位置 x における温度分布 $\theta(x,t)$を記述する一次元熱伝導方程式

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=\kappa\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} \quad (\kappa\text{は正の定数}) \qquad (1)$$

を，境界条件 $\theta(0,t)=0$, $\theta(L,t)=0$, 初期条件が $\theta(x,0)=\theta_0$ ($0<x<L$ で与えられ，θ_0は正の定数)を満たす解 $\theta(x,t)$を求める。以下の設問(a)~(d)に答えよ。

(a)　(1)の解 $\theta(x,t)$を $\theta(x,t)=T(t)X(x)$と置き，変数分離法によって求める。ただし変数分離定数を$-p^2$（ただし p は正数）と置く。その時，次式(2)と(3)を導け。

$$\frac{dT}{dt}+p^2T=0 \qquad (2)$$

$$\frac{d^2X}{dx^2}+\frac{p^2}{\kappa}X=0 \qquad (3)$$

(b)　微分方程式(3)の境界条件を満たす解は，A_n を任意定数として，

$X(x)=A_n\sin\dfrac{n\pi x}{L}$　　$(n=1,2,\cdots)$で与えられることを示せ。

(c)　微分方程式(2)の一般解は，B_n を任意定数として，

$T(t)=B_n\exp(-n^2\pi^2\kappa t/L^2)$　　$(n=1,2,\cdots)$で与えられることを示せ。

(d)　(b)，(c)で求めた解の重ね合わせを考慮して，$\theta(x,t)$は

$\theta(x,t)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\frac{n\pi x}{L}\exp(-n^2\pi^2\kappa t/L^2)$で与えられる。初期条件を用いて

C_n を求めよ。