平成２４年度
九州大学大学院理学府
修士課程地球惑星科学専攻
入学試験問題

（全１８ページ）

（３００点）

注意事項

(1) この問題冊子には，合計９題が出題されている。

問題１　地質学	問題２　古環境学・古生物学	問題３　岩石学・鉱物学
問題４　一般化学	問題５　地球化学	問題６　熱力学
問題７　力学	問題８　電磁気学	問題９　物理数学

(2) 第１志望・第２志望ともに，岩石循環科学，地球進化史，古環境学，初期太陽系進化学，有機宇宙地球化学，無機生物圏地球化学，地球惑星物質科学，地球惑星博物学の各専門分野を志望する受験生は，９問題のなかから任意に３問題を選択すること。

(3) 第１志望または第２志望で，太陽地球系物理学，宇宙地球電磁気学，中層大気科学，対流圏科学，地球流体力学，固体地球惑星力学，地球内部ダイナミクス，観測地震・火山学の各専門分野を志望する受験生は，問題６～問題９(上記の下線を引いた問題)のなかから少なくとも２問題を含む，合計３問題を選択すること。下線を引いた問題以外から２問題以上選択した場合は，１問題のみを有効とし，他の解答問題は無効(０点)とするので注意すること。

(4) 解答はそれぞれ別の解答用紙の枠内に書くこと(裏面使用可)。

(5) それぞれの解答用紙には，受験番号，氏名，選択した問題の番号を記入すること。

(6) この問題冊子は持ち帰ってよい。

問題１　地質学　（100 点）

以下の問い（問１，問２）に答えよ。

問１　次の文章を読んで，設問（1）～（4）に答えよ。

ヒマラヤ山脈の成因はインド亜大陸が北上し，ユーラシア大陸南部に衝突したことによると言われている。衝突のピークは（　A　）Ma ごろで，この影響によりユーラシア大陸では地殻規模の変形が起こっている。また，アパラチア山脈は，現在の北米大陸の主要部分およびスカンジナビア半島を含む（　B　）大陸と，アフリカ大陸や南アメリカ大陸が一体化した（　C　）大陸が衝突して形成したものである。この衝突は，約（　D　）億年前に完了し，延長距離が(　E　) km に及ぶ巨大山脈をつくった。この時できた超大陸が（　F　)である。

（1）　文中の空所（　A　）～（　F　）に最もよくあてはまる数字もしくは語句を下記の語群より選択せよ。

1,　3,　5,　7, 20, 55, 65, 95, 1500, 2000, 6000, 25000, Rodinia, Colombia, Pangea, Acadia, Amasia, Laurentia, Gondwana, Antarctica

（2）　インド亜大陸, ヒマラヤ山脈, および太平洋の平均的な地殻の厚さを記せ。

（3）　インド亜大陸衝突の影響で形成した堆積盆もしくは湖について具体的な名称を２つ記し，それらがどのような断層活動で形成したか述べよ。

（4）　地質年代を決定するためには様々な方法がある。以下の年代測定法でアパラチア山脈形成時期を推定するときに，測定岩石と試料の組合せが適切なものを 1)～7)から選択し，番号を記せ。

	<u>測定法</u>	<u>測定岩石</u>	<u>試料</u>
1）	Ar–Ar 法	塩基性岩	角閃石
2）	U–Pb 法	片麻岩・花崗岩	ジルコン
3）	化石年代	チャート	デスモスチルス
4）	U–Th–Pb 法	石灰岩	白雲母
5）	K–Ar 法	砂岩	アパタイト
6）	^{14}C 法	断層岩	放散虫
7）	FT 法	貫入岩	モナザイト

（次ページに続く）

（問題１の続き）

問 2　A砂漠において，地質図（図１）を作成し石油掘削を計画した。一般に，石油はキャップロックに覆われた多孔質の石灰岩や砂岩の背斜軸部に貯留すると言われている。蒸発岩層や石灰岩層が連続して露出するＡ砂漠では，石油埋蔵の可能性が高い。Ａ砂漠は起伏に乏しく平坦で，所々に湖が存在する。掘削は掘削やぐらをたて，垂直掘りで行う。以下の設問（１）～（４）に答えよ。

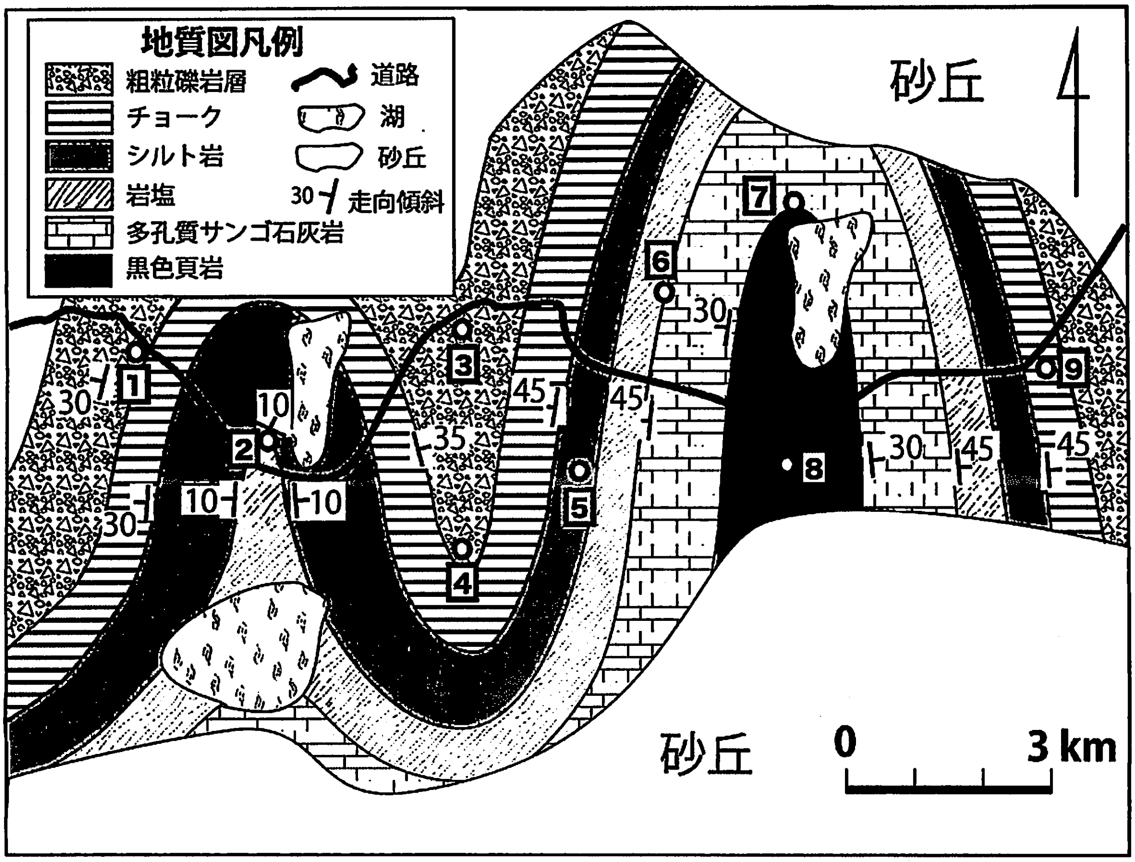


図１　A砂漠の地質図

（１）　地質図を読み，蒸発岩層の厚さを求めよ。

（２）　石油採掘に最も有力な地点を 1 ～ 9 の中から選び，その理由を述べよ。

（３）　選んだ掘削点における石油貯留層までの掘削深度を求めよ。

（４）　掘削ビットが石油貯留層に到達した深さにおける圧力を求めよ。

注：すべての岩石の密度（ρ）を $\rho=2.5\ \mathrm{g/cm^3}$，重力加速度（$g$）は $g=9.8\ \mathrm{m/s^2}$ とする。

問題２　　古環境学・古生物学（100 点）

以下の問い（**問１～問３**）に答えよ。

問１　古環境学に関する以下の事項を，それぞれ 50 字程度で説明せよ。

（１） 氷河性海水準変動

（２）ミランコヴィッチサイクル

（３）ダンスガード・オシュガーサイクル

（４）年縞ラミナ

問２　古生物学に関する以下の事項を，それぞれ 50 字程度で説明せよ。

（１）示相化石

（２）示準化石

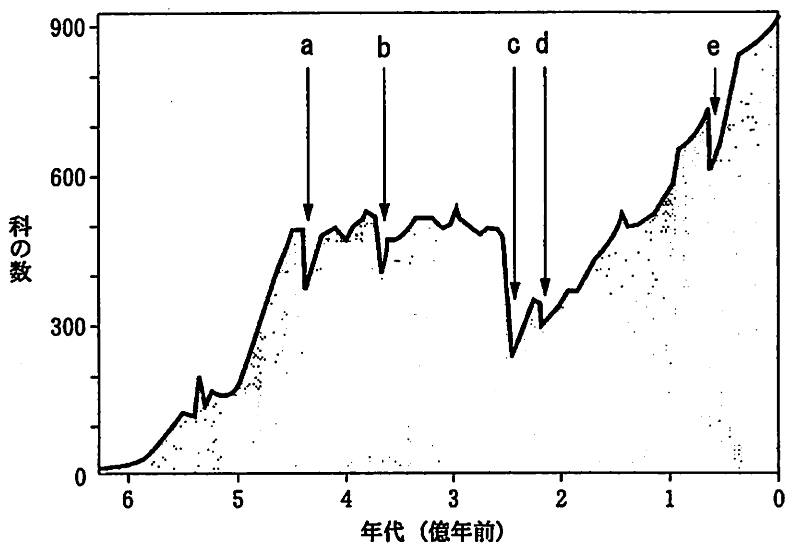
（３）エディアカラ生物群

（４）バージェス頁岩動物群

（　次ページに続く　）

問３　生物の大量絶滅に関する次の文章を読み，設問（1）～（4）に答えよ。

下図は，地質時代における海生動物の種類数（科の数）の変化を示している。多くの生物が短期間に姿を消す事象を大量絶滅といい，古生代以降現在までに少なくとも５回生じた。このうち２回は，（ ア ）紀末の古生代と中生代の境界と，（ イ ）紀末の中生代と新生代の境界に位置している。大量絶滅の原因としては，隕石の衝突など様々な原因が論じられている。



海生動物の種類数（科の数）の変動

Rohde & Muller (2005)より改変

（1）本文中の（ア）と（イ）に相当する紀レベルの地質時代名を記せ。

（2）古生代と中生代の境界に位置する大量絶滅期に相当する時期を，図中の矢印（ａ ～ ｅ）から選べ。

（3）中生代と新生代の境界に位置する大量絶滅期に相当する時期を，図中の矢印（ａ ～ ｅ）から選べ。

（4）中生代と新生代の境界に位置する大量絶滅の原因として，隕石衝突説が有力である。この説について100字程度で説明せよ。

問題3　岩石学・鉱物学（１００点）

以下の問い（問１，問２）に答えよ。

問１　次の文を読んで，設問（1）～（5）に答えよ。

鉱物とは地球や惑星などを構成する無機化合物で，その多くは内部に規則正しい原子配列を持ち，結晶質である。この規則正しい原子配列は平行でない３本の並進ベクトルにより表され，この並進ベクトルをスカラー表現したものが（　ア　）で，(A)<u>6個のパラメーターで表される</u>。

内部の規則正しい原子配列を反映した規則正しい外形を示す固体が結晶で，その規則性は結晶面の繰り返しの規則として表現される。結晶面の繰り返しの規則は，（　イ　），（　ウ　），（　エ　），（　オ　）の対称要素とその組み合わせよりなる（　カ　）個の点群にまとめられる。（　カ　）点群は繰り返しの規則を反映した結晶軸に対する制約により，(B)<u>7つの晶系に分類することが出来る</u>。

結晶内部の原子配列はX線と原子との相互作用を基に決定することが出来る。三次元的に周期的に配列した原子から散乱されるX線は，(C)<u>ブラッグの回折条件</u>として知られる二つの条件を同時に満たしたときに強め合い，結晶からの強い回折X線が観測される。

（1）カッコ内（ア）～（カ）に入る適切な語句を答えよ。

（2）下線（A）の6個のパラメーターの関係を並進ベクトルを用いて表せ。

（3）下線（B）の7つの晶系の名前と，それぞれの結晶軸に対する制約を記せ。

（4）下線（C）のブラッグの回折条件を簡潔に述べよ。

（5）X線回折法で求めた黄鉄鉱（FeS_2）の格子定数は a = 0.541 nm であった。黄鉄鉱は立方晶系で，$z = 4$，Fe と S の原子量はそれぞれ 55.8，32.1 として，黄鉄鉱の密度を求めよ。ただし，計算過程を示して有効数字3桁で答えよ。

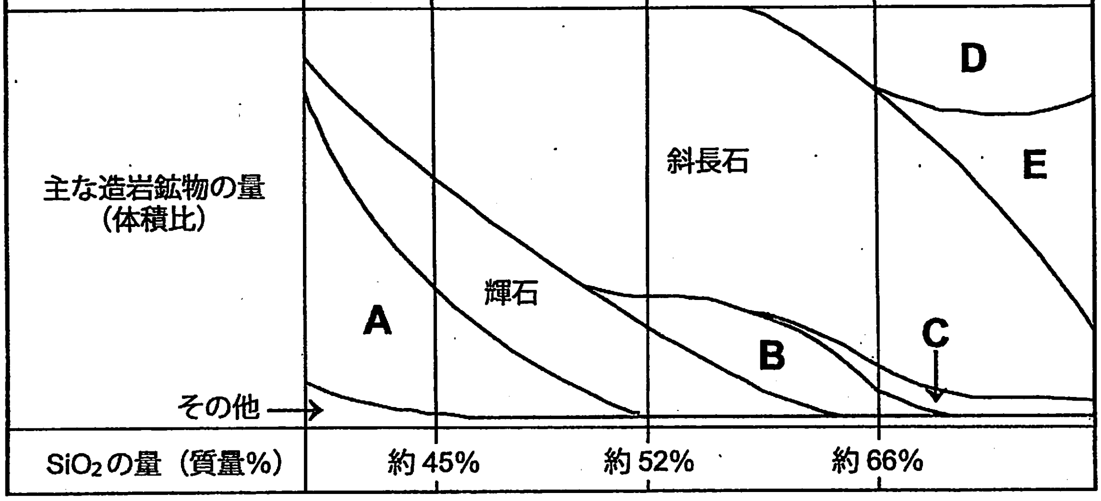
（アボガドロ定数　$N_A = 6.02 \times 10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}}$）

（次ページに続く）

(問題３の続き)

問２　下の図は火成岩の分類を表したものである。下の図を見て，設問（１）～（４）に答えよ。

岩石の種類	超塩基性岩	塩基性岩（苦鉄質岩）	中性岩	酸性岩（珪長質岩）
火山岩（　**(あ)**　）		**(う)**	**(え)**	**(お)**
深成岩（等粒状組織）	**(い)**	斑れい岩	閃緑岩	**(か)**



（１）**(あ)** には組織名を，**(い)** ～ **(か)** には岩石名を答えよ。

（２）Ａ～Ｅの鉱物名と組成式を記せ。Ａ，Ｂ，Ｃは有色鉱物，Ｄ，Ｅは無色鉱物である。

（３）斜長石の化学組成は，塩基性岩中と酸性岩中で違いが認められる。斜長石を二成分系の固溶体として相図を描き，その原因について説明せよ。

（４）火成岩中の輝石は四成分系の固溶体として考えることができ，その化学組成は温度の推定に用いられる。輝石台形上の４つの端成分鉱物の名前と組成式を輝石台形上に記し，輝石温度計の原理について定性的に簡潔に説明せよ。

問題４　一般化学　(100 点)

以下の問い（問１，問２）に答えよ。

問１　溶解度と溶解度積に関する以下の設問（１）～（３）に答えよ。以下の操作は温度一定（25 °C）の条件で行われたものとする。なお答は有効数字 1 桁で求めよ。必要ならば次の平方根の値を用いよ。$\sqrt{2} = 1.4$, $\sqrt{3} = 1.7$, $\sqrt{5} = 2.2$

（１）塩化銀の溶解度積は $K_{AgCl} = 1 \times 10^{-10}$ $mol^2\ dm^{-6}$ である。純水に塩化銀を溶かしてできた飽和溶液の Ag^+ と Cl^- の濃度（$mol\ dm^{-3}$）を求めよ。

（２）1×10^{-4} $mol\ dm^{-3}$ の Cl^- と I^- を含む混合溶液がある。この溶液に硝酸銀を加えて沈殿を生成させる。このとき

（ア）先に沈殿が生じるのは I^- である。この塩化銀とヨウ化銀との溶解度の差を HSAB（Hard-Soft Acid-Base）理論の考え方から説明せよ。

（イ）$K_{AgI} = 1 \times 10^{-16}$ $mol^2\ dm^{-6}$ である。塩化銀が沈殿し始める時に残存する I^- の濃度を求めよ。

（３）　硫化亜鉛(ZnS)の溶解度を考える場合には，硫化物イオンの酸解離平衡を考慮しなくてはならない。

（ア）硫化水素が水に溶け，硫化物イオンを生じるまでの酸解離平衡式を示せ。

（イ）ある pH における硫化亜鉛の溶解度を x（$mol\ dm^{-3}$）とおく。x を硫化水素 H_2S の第一解離定数 k_1, 第二解離定数 k_2, 水素イオン濃度$[H^+]$，および$[S^{2-}]$を用いて表せ。なお第一解離定数は $k_1 = [H^+][HS^-]/[H_2S]$であり，k_2 も同様に定義できるとする。

（ウ）pH 2 での硫化亜鉛の溶解度を求めよ。なお $K_{ZnS} = 2 \times 10^{-24}$ $mol^2\ dm^{-6}$, $k_1 = 1 \times 10^{-7}$ $mol\ dm^{-3}$，$k_2 = 1 \times 10^{-14}$ $mol\ dm^{-3}$ とする。

（エ）pH 10 での硫化亜鉛の溶解度を求めよ。亜鉛イオンと水酸化物イオンとの錯形成の影響は考慮しないこととする。

（　次ページに続く　）

問２　次の文章を読んで以下の設問（１）～（３）に答えよ。

炭素とケイ素はどちらも第 4 族の元素であり，原子価は双方とも 4 である。しかし炭素は生物体内の主要元素であるのに対し，ケイ素は地殻やマントルの主要元素で，それぞれの分布は大きく異なる。また炭素同士，ケイ素同士，または炭素やケイ素と異なる原子の結合エネルギーにはそれぞれ特徴がある。それぞれの結合エネルギーを以下の表に示した。

	X-H(X=C or Si)	X-X	X-Cl	X-O	X-N
C	413	346	339	358	301
Si	318	176	382	775	440

（単位 $\mathrm{kJ\ mol^{-1}}$）

（１）　次の基底状態の電子配置の表記法に従い，炭素，ケイ素の基底状態の電子配置を書き表せ。

（例）　窒素の電子配置　$(1s)^2(2s)^2(2p)^3$

（２）　炭素と炭素の結合エネルギーについて，横軸に核間距離 d，縦軸にポテンシャルエネルギー E を示し，エネルギー変化の関係を図示せよ。なお結合距離 D および結合エネルギー Ea の大きさが図中のどの部分に相当するかを明記せよ。

（３）　結合エネルギーの表から考えられる炭素とケイ素の相違点から，それぞれの元素の分布の違いを説明せよ。

問題5 地球化学 (100 点)

下の表と文章を参考にして，**問1～問3**に答えよ。

地球進化の初期の段階で，地球は成層構造へと分化したと考えられている。衝突の際の微惑星からの脱ガスやマントルからの脱ガスに伴って大気の形成が進行した。原始地球において形成された大気（以下，原始大気と呼ぶ）の化学組成を推定した研究の一例を表1に示す。この表では，原始大気中に存在する成分の質量(単位はg)の推定値をまとめ，現在の大気中の存在量と比べている。

表1　原始大気と現在の大気に存在する成分の比較（推定される存在量をgで示した）

成分	H_2O	CO_2	HCl	SO_2	N_2	H_2	Ar
原始大気	1.6×10^{24}	2.0×10^{23}	3.3×10^{22}	5.0×10^{21}	4.5×10^{21}	4.0×10^{21}	5.0×10^{17}
現在の大気	$\sim10^{20}$	4.5×10^{18}	微量	微量	7.5×10^{21}	3.3×10^{14}	1.2×10^{20}

（北野康著「地球化学像と環境問題」表2・16をもとに作成）

問1　以下の設問 (1)，(2) に答えよ。

(1) 表にあるように原始大気の主な成分は，水蒸気 (H_2O)，二酸化炭素 (CO_2)，次いで塩化水素 (HCl) であると考えられている。塩素が塩化水素として原始大気に取り込まれマントルには取り込まれにくかった理由を，その化学的性質にもとづいて説明せよ。

(2) 酸素 (O_2) は原始大気にほとんど存在していなかったが，ある生化学反応の副産物として生成されたものが蓄積し，現在の大気の主な成分の一つとなったと考えられている。この生化学反応により、酸素とブドウ糖 ($C_6H_{12}O_6$) が生成される際の化学反応式を記せ。

問2　次の文章を読んで，以下の設問 (1)，(2) に答えよ。

現在の大気中のアルゴン (Ar) 存在量が原始大気中の存在量に比べてはるかに多いのは，地殻やマントルに含まれるカリウム (K) から放射壊変によって生成したアルゴンが付加されたためであると考えられている。簡単のため，原始大気が形成された時点から現在まで放射壊変によって生成したアルゴンがすべて大気中に蓄積したと仮定するモデルを考えて，以下の計算を行う。

カリウムには ^{39}K, ^{40}K, ^{41}K の3つの同位体があり，このうち ^{40}K が放射性同位体で半減期12.5億年で放射壊変する（壊変定数は $\lambda = 5.3\times10^{-10}\,yr^{-1}$ である）。そのうち89%はベータ壊変により ^{40}Ca になり，残りの11%は電子捕獲により ^{40}Ar に壊変する。

（次ページに続く）

(1) 一般に，ある時間 t が経過した時点での親核種の原子数 P は，壊変定数 λ を用いて

$$P = P_0 \exp(-\lambda t) \quad \cdots \quad ①$$

とあらわすことができる。ここで P_0 は，t=0 における P の値である。
親核種からただ一つの娘核種が放射壊変により生成する場合を考えて，ある時間 t が経過した時点での娘核種の原子数 D を，t=0 における P の値 P_0 と t=0 における D の値 D_0 を用いてあらわせ。

(2) 原始大気が形成された時点を t=0 とする。t=0 において地殻やマントルに存在していた ^{40}K の質量（$m_{K(0)}$ とする）を 1.0×10^{21} g と仮定し，37.5 億年（^{40}K の半減期の 3 倍）が経過した時点での大気中の ^{40}Ar の質量 m_{Ar} を推定せよ。ただし，t=0 における ^{40}Ar の質量（$m_{Ar(0)}$ とする）については前ページの表 1 の値を用いること。また，推定値は有効数字 1 桁で示せばよいが，計算過程がわかるように解答すること。

問 3　次の文章を読んで，以下の設問 (1), (2) に答えよ。

現在の大気中の二酸化炭素（CO_2）存在量が原始大気中の存在量に比べてはるかに少ないのは，原始海洋が形成された後に炭酸塩鉱物と有機物に形を変えて海底堆積物として固定されたためであると考えられている。次の文章は，海底堆積物中の炭酸塩鉱物と有機物の炭素同位体比に相違が見られることを述べたものである。

35 億年前から 10 億年前の間に形成された堆積物の炭素同位体比を調べると，（　あ　）の炭素同位体比は $\delta^{13}C = 0 \pm 3$ ‰ (PDB) の範囲に入るのに対して（　い　）の炭素同位体比は $\delta^{13}C = -25 \pm 10$ ‰ (PDB) の範囲に入る。このように（　い　）がより（　う　）炭素同位体比を示すのは，（　え　）として説明される同位体分別作用の効果である。一方，この範囲を外れる炭素同位体比が 23 億年前から 20 億年前の堆積物に特異的に見いだされることを報告する研究もある。(A)<u>例えば，この年代に形成された炭酸塩鉱物には，他の年代のものに比べて，より（　お　）炭素同位体比を示すものがある。</u>

(1) 空欄（あ）～（お）に入る適当な語を，以下の解答群から重複がないように選び記号で答えよ。

(a) 炭酸塩鉱物，(b) 有機物，(c) ^{13}C に富んだ，(d) ^{13}C に乏しい，
(e) 同位体交換平衡反応，(f) 動的同位体効果

(2) 上の下線(A)で述べた炭酸塩鉱物の異常な炭素同位体比の要因として，問 1 (2)で述べたある生化学反応がこの年代に急激にさかんになったために地球の炭素収支のバランスが崩れた，と主張する仮説が提唱されている。この仮説に従って，炭酸塩鉱物に炭素同位体比異常が見られる理由を説明せよ。

問題6　熱力学（100点）

孤立系が，ある状態変数の値のもとで安定平衡であるとき，エントロピーは極大値をとる。また，系が非平衡状態から安定平衡状態に移る際には，系のエントロピーは増加する。以下の問い（問1～問5）に答えよ。ただし，エントロピーをS，体積をV，分子数をN，温度をT，圧力をP，化学ポテンシャルをμとする。

問1　一般に，1成分系の内部エネルギーEの微分形式は，

$$dE = TdS - PdV + \mu dN \qquad (a)$$

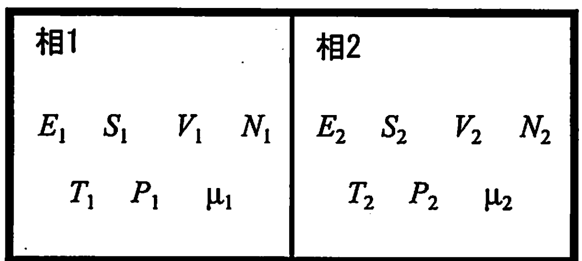
と表される。以下の設問(1)および(2)に答えよ。

(1) 式(a)と同様に，Gibbsの自由エネルギーGを微分形式で示せ。

(2) 次の関係式が成り立つことを示せ。

$$T = \left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_{V,N}, \quad P = -\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_{S,N}, \quad \frac{P}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{E,N} \qquad (b)$$

問2　下の図のように断熱壁に囲まれて外部との間で物質の出入りのない体積一定の箱の中に1成分の2つの相，相1と相2が接している系を考える。



断熱壁

この系が安定平衡である条件は

$$T_1 = T_2, \quad P_1 = P_2, \quad \mu_1 = \mu_2 \qquad (c)$$

である。以下の設問(1)～(3)に答えよ。

(1) S_1をE_1, V_1, N_1の関数と見なして，全微分形式で表せ。

(2) 系全体の体積が一定であることにより，体積V_1とV_2の微小な変化dV_1とdV_2の関係を表せ。

(3) 各相での内部エネルギー，体積，分子数の微小な変化に対して系のエントロピーが極値をとる条件は式(c)で与えられることを示せ。

(次ページに続く)

問3 問2の場合，系のエントロピーの極値が極大値であるとき，定積比熱が正であることを示せ。

問4 1成分系において2相（例えば，気相と液相）が安定平衡に共存する温度Tと圧力Pは，次の Clausius-Clapeyron の式に従う。

$$\frac{dP}{dT} = \frac{\Delta s}{\Delta v} \qquad (d)$$

ここで，ΔsとΔvは，それぞれ，共存する2相間の単位分子数当たりのエントロピー差および体積差である。式(d)を導け。

問5 分子数，圧力，それぞれの成分の化学ポテンシャルが等しい同じ物質からなる2相が，温度のみが異なる非平衡状態にある。ここで，T_1^0，T_2^0を相1と相2の初期温度とする。この状態から出発して，2相間で熱の移動が起こり，共通の温度

$$T_e = \frac{1}{2}\left(T_1^0 + T_2^0\right) \qquad (e)$$

を持つ平衡状態になったとする。各相の比熱Cは一定であり，物質の変形や移動，相変化は起こらないと仮定し，初期非平衡状態から平衡状態へ移る際のエントロピーの変化が，正であることを示せ。

問題７　力学（100点）

以下の問１，問２に答えよ。

問１　図１に描かれているポテンシャルエネルギー$U(x)$の下での質量mの質点の１次元（x軸方向）の運動について考える。ここで，$U(x)$や，そのxによる１階導関数$U'(x)$や２階導関数$U''(x)$は，xの連続関数であるとする。図１のように，$U(x)$は，$x<a$および$b<x$において単調減少，$a<x<b$において単調増加であり，$x\to\pm\infty$ において$U(x)\to\mp\infty$である（複号同順）。以下の設問（１），（２）に答えよ。

（１）図の$x=c$の位置（ただし，$a<c<b$）において，初速度v_0で質点が運動を始めたとする。その後どのような運動をするかについて，v_0の値により場合分けして述べよ（力学的エネルギー保存則を用いて考察すること）。

（２）位置$x=a+\varepsilon$（ただし，εは微小量）において，質点が初期に静止した状態から運動を始めたときに，質点は単振動をした。単振動の周期を求めよ。

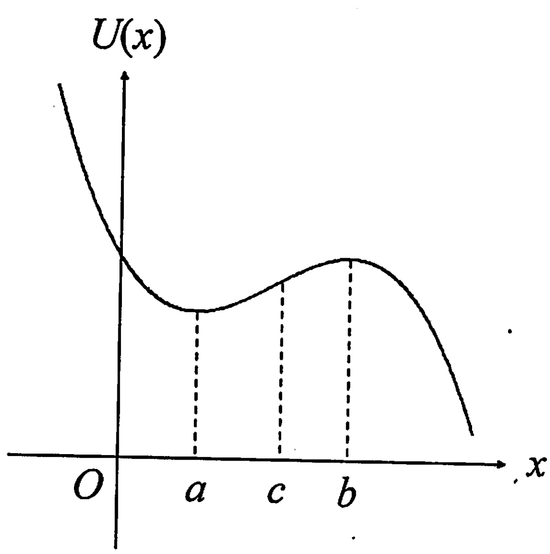


図１．ポテンシャルエネルギー

（次ページに続く）

問２　図２のような外径がR_{O}，内径がR_{I}で，厚さがhの剛体円盤がある。円盤の外径と内径の間には，密度が一定値ρの物質があり，内径より内側には物質は存在しなくて穴があいている。以下の設問（１），（２）に答えよ。

（１）円盤の中心を通り，円盤に垂直な軸（以下ではz軸と呼ぶ）のまわりの慣性モーメントIを求めよ。

（２）円盤をz軸まわりに角速度ω_0で回転させ，水平な床の上に円盤面を水平に保ちながら静かに置いた。円盤は床との摩擦により回転角速度を減じていく。この場合について，以下の設問（ア）～（ウ）に答えよ。ただし，重力加速度の大きさをgとする。

（ア）床に接している円盤面の単位面積当たりに働く垂直抗力の大きさNが，面上の位置によらず一定であるとするとき，NをR_{O}，R_{I}，h，ρ，gのうち必要なものを用いて表せ。

（イ）床と円盤の表面との間の動摩擦係数が一定値μ'であるとする。円盤に働くz軸まわりの力のモーメントの大きさTをμ'，N，R_{O}およびR_{I}を用いて表せ。

（ウ）円盤を床の上に置いてから回転が止まるまでの時間tをT，Iおよびω_0を用いて表せ。

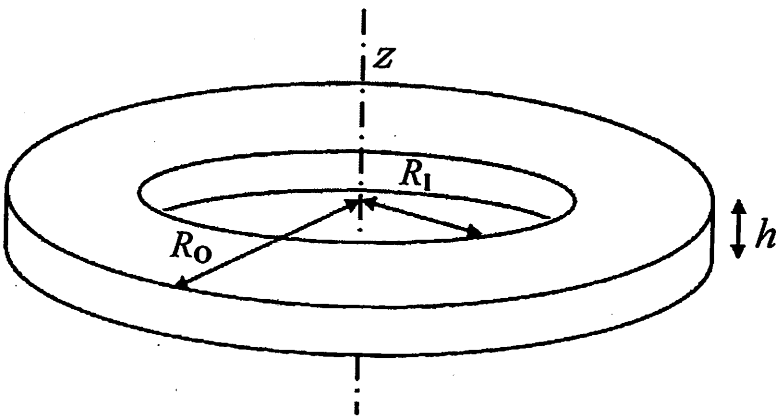


図２．剛体円盤

問題８　電磁気学　（100 点）

以下の問い（問１～問３）に答えよ。

問１　次の文を読み，空欄(A)～(E)を埋めよ。ただし，(E)は数値で答えよ。

空気は固体地球と比べると非常によい絶縁体であるが，実際には有限な電気伝導率を持つため，電場がかかることにより伝導電流が流れる。今，地球を電荷 Q が帯電した半径 a の孤立した完全導体と見なし，その周囲を電気伝導率 $\sigma = 3\times10^{-14}\ \Omega^{-1}\cdot\mathrm{m}^{-1}$ の大気が取り巻いているものとする。また，真空中の誘電率は $\varepsilon_0 = 9\times10^{-12}\ \mathrm{C}^2\cdot\mathrm{N}^{-1}\cdot\mathrm{m}^{-2}$ とする。

この時，地球表面における半径方向（r 方向）の電場は $E_r =$ （ A ） であり，その結果 $j_r = \sigma E_r$ の電流密度で地表面から大気中に向けて電流が流出する。地表面から出て行く総電流量 I は Q とσを用いて，$I =$ （ B ）と書ける。一方，任意の面を貫く電流は，その面を単位時間当たりに通過する電荷量で定義されることから Q の時間変化が従う微分方程式は （ C ） で記述される。

この微分方程式の解は，最初に溜まっていた電荷を Q_0 とすると，$Q(t) =$ （ D ）となる。従って最初に蓄えられていた電荷は （ E ）秒程度の時間で 1/e （e は自然対数の底）程度にまで減衰することになる。以上により，何らかの充電機構が存在しない限り，地球上の表面電荷は有限な大気伝導度の存在により，（ E ）秒程度の時間スケールで消失することになる。

注　必要に応じて以下の単位換算を参照せよ。

[C]=[A・s]，[Ω]=[V・A^{-1}]，[V]=[J・C^{-1}]，[J]=[N・m]

問２　次の文を読み，文章中の空欄（ア）～（カ）を埋めよ。

孤立した一つの閉ループの自己インダクタンスを L とし，そこに流れる電流を I とした場合，このループを貫く磁束は $\Phi =$（ア） である。従って，電流の時間変化に伴って励起される誘導起電力は V=(イ)である。Vに逆らって電流を増大させるためには外部から仕事をする必要がある。従って，

（次ページに続く）

電流を０からIまで増大させるために外部からなされた仕事は，U = （ウ）なるエネルギー（磁場のエネルギー）として閉ループに蓄えられることになる。

次に，二つの閉ループ A, B によって形成される系を考える。それぞれの閉ループの自己インダクタンスを L_A, L_B, 相互インダクタンスをMとし，閉ループ A には電流 I_Aが，閉ループ B には電流 I_Bが流れているものとする。このとき，閉ループ A を貫く磁束は Φ_A = （エ）となり，閉ループ B を貫く磁束は Φ_B = （オ）となる。このとき，この系全体に保持される磁場エネルギーは U = （カ）である。

ただし，各々の閉ループの電気抵抗は無視してよい。

問３　以下の設問（１）～（３）に答えよ。

（１）電場ベクトルを $\mathbf{E}$, 磁束密度ベクトルを $\mathbf{B}$, 伝導電流密度ベクトルを $\mathbf{j}$, 電荷密度をρ, 真空中の誘電率をε_0, 透磁率をμ_0 とするとき，真空中のマクスウェル方程式のセット：(a)電場の発散, (b)磁束密度の発散, (c)電場の回転, (d)磁束密度の回転に関する式を，それぞれ書き下せ。

（２）上記の内, (a)と(d)をもとに, $\mathbf{j}$ とρの関係式を導き，その物理的意味を説明せよ。

（３）(c)と(d)をもとに,「エネルギー保存」に関する式を導き，その物理的意味を説明せよ。
ただし，必要に応じて$\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=\mathbf{B}\cdot(\nabla\times\mathbf{A})-\mathbf{A}\cdot(\nabla\times\mathbf{B})$の関係を用いてよい。

問題 9　物理数学（100 点）

以下の問い（問 1〜問 5）に答えよ。

問 1　以下の微分方程式の一般解を求めよ。

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{d}x}+2y=e^{-x}$$

問 2　以下の複素積分の値を求めよ。積分路は複素平面における円周上の正の向き（反時計まわり）に 1 周するものとする。

$$\mathrm{I}=\oint_{|z|=1}\frac{\cos z}{z}\,\mathrm{dz}$$

問 3　行列　$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 4\end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを利用して A^{n} を求めよ。ただし n は正の整数とする。

問 4　3 次元直交直線座標(x,y,z)系を考え，その基本ベクトルを $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ とする。ベクトル $\boldsymbol{A}=2xz^2\,\boldsymbol{i}-yz\,\boldsymbol{j}+3xz^3\,\boldsymbol{k}$，スカラー $\varphi=x^2yz$ の時，以下の(a)~(d)の値を求めよ。$\nabla\cdot\boldsymbol{A}$ と $\nabla\times\boldsymbol{A}$ はベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の発散と回転で，$\nabla\varphi$ と $\nabla^2\varphi$ はスカラー場φの勾配とラプラシアンである。

(a) $\nabla\cdot\boldsymbol{A}$　　(b) $\nabla\times\boldsymbol{A}$　　(c) $\nabla\varphi$　　(d) $\nabla^2\varphi$

（次ページに続く）

（問題９の続き）

問５　時間 t，位置 x における温度分布 $\theta(x,t)$を記述する一次元熱伝導方程式

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=\kappa\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} \quad (\kappa\text{は正の定数}) \qquad (1)$$

を，境界条件 $\theta(0,t)=0$, $\theta(L,t)=0$, 初期条件が $\theta(x,0)=\theta_0$ ($0<x<L$ で与えられ，θ_0は正の定数)を満たす解 $\theta(x,t)$を求める。以下の設問(a)~(d)に答えよ。

(a)　(1)の解 $\theta(x,t)$を $\theta(x,t)=T(t)X(x)$と置き，変数分離法によって求める。ただし変数分離定数を$-p^2$（ただし p は正数）と置く。その時，次式(2)と(3)を導け。

$$\frac{dT}{dt}+p^2T=0 \qquad (2)$$

$$\frac{d^2X}{dx^2}+\frac{p^2}{\kappa}X=0 \qquad (3)$$

(b)　微分方程式(3)の境界条件を満たす解は，A_n を任意定数として，

$X(x)=A_n\sin\dfrac{n\pi x}{L}$　　$(n=1,2,\cdots)$で与えられることを示せ。

(c)　微分方程式(2)の一般解は，B_n を任意定数として，

$T(t)=B_n\exp(-n^2\pi^2\kappa t/L^2)$　　$(n=1,2,\cdots)$で与えられることを示せ。

(d)　(b)，(c)で求めた解の重ね合わせを考慮して，$\theta(x,t)$は

$\theta(x,t)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\frac{n\pi x}{L}\exp(-n^2\pi^2\kappa t/L^2)$で与えられる。初期条件を用いて

C_n を求めよ。