

問題9 物理数学 (100点)

以下の問い (問1～問5) に答えよ。解答用紙には計算の途中経過も書くこと。

問1 ベクトル演算子に関する以下の設問 (1), (2) に答えよ。ただし,  $i, j, k$  は  $x, y, z$  方向の単位ベクトルである。

(1) 次の公式を証明せよ。

$$\operatorname{div}(A \times B) = B \cdot \operatorname{rot} A - A \cdot \operatorname{rot} B$$

ここで,  $A = A_x i + A_y j + A_z k$ ,  $B = B_x i + B_y j + B_z k$  である。

(2) 次の3次元のベクトル場について,  $\operatorname{div} X$  を求めよ。

$$X = \left(\frac{x}{2} - y^2\right) i + \left(x^2 + \frac{y}{2} - z\right) j + (x^2 + y^2) k$$

問2 以下の設問 (1), (2) に答えよ。

(1) 次の行列  $A$  がユニタリー行列であることを示せ。ここで,  $i$  は虚数単位である。

$$A = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} \\ -i/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

(2) 行列  $A$  の固有値と固有ベクトルを求めよ。

問3 次の常微分方程式が完全微分形であることを示し, その一般解を求めよ。

$$(2x \cos y + y^2 \cos x) dx + (2y \sin x - x^2 \sin y) dy = 0$$

( 次ページに続く )