問 3 二次元直交座標 (x, y) 内における質量 m の質点の運動方程式が，以下の式で与えられているとする。

$$m\frac{dv_x}{dt} = -m\alpha v_x + m\beta v_y \qquad \cdots \text{(i)}$$

$$m\frac{dv_y}{dt} = -m\alpha v_y - m\beta v_x \qquad \cdots \text{(ii)}$$

ただし，$v_x = dx/dt$，$v_y = dy/dt$ であり，α，β は実定数である。初期条件として，時間 $t = 0$ において，$v_x = 0$，$v_y = v_0$ とする。以下の設問 **(1)**〜**(4)** に答えよ。

(1) $\alpha = 0$ かつ $\beta > 0$ のとき，運動エネルギーは時間に関し一定であることを示せ。

(2) 設問 **(1)** のとき，実定数 A と B を用いて，

$$v_x = -A\cos(\beta t) - B\sin(\beta t), \quad v_y = A\sin(\beta t) - B\cos(\beta t)$$

と表すことができる。このとき，上記初期条件のもとで A と B を求めよ。

(3) $\alpha > 0$ かつ $\beta = 0$ のとき，上記初期条件のもとで運動エネルギーの時間変化を求めよ。

(4) $\alpha > 0$ かつ $\beta > 0$ のとき，

$$v_x = -f(t)[A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t)], \quad v_y = f(t)[A\sin(\beta t) - B\cos(\beta t)]$$

の形の解を考え，$f(t)$ に関する微分方程式を解くことにより，上記初期条件を満たす v_x と v_y を求めよ。