

問題 9 物理数学 (100 点)

以下の問い (問 1 ~ 問 5) に答えよ。

問 1 以下の設問 (1) ~ (3) に答えよ。ただし e は自然対数の底とする。

(1) $\sin x$, $\cos x$, e^x を x のべき級数で表せ。

(2) $e^{i\theta}$ を $\sin \theta$, $\cos \theta$ を用いて表せ。 θ は実数であるとし, i は虚数単位である。

(3) 設問 (2) の結果を用いて, $\cos 3\theta$ を $\cos \theta$ で表せ。

問 2 以下の設問 (1) ~ (3) に答えよ。ただし T は転置を表すとする。

(1) 二次形式はベクトル $r = (x, y, z)^T$ と対称行列 A で $r^T A r$ と表すことができる。次の二次形式 Q に対して行列 A を書き下し, その固有値と, 対応する大きさ 1 の固有ベクトルを全て求めよ。

$$Q = 3x^2 + 3y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2zx$$

(2) 固有値の絶対値が大きい順番に, 対応する固有ベクトルを左から並べた行列を P とする。 P を用いて A を対角化せよ。

(3) $r' = (x', y', z')^T$ として変数の変換 $r = P r'$ を行い, Q を変換後の変数で表せ。

問 3 三次元直交座標系において, 位置ベクトル $r = (x, y, z)$ 及び定数ベクトル $A = (A_x, A_y, A_z)$ が与えられるとき, 以下のスカラー関数の勾配を求めよ。

$$\phi(r) = \frac{A \cdot r}{r^3}$$

ただし, $A \cdot r$ はベクトル A と r の内積を表し, $r = |r|$, $r \neq 0$ とする。

問 4 次の方程式の一般解を求めよ。

$$\frac{dy}{dx} - y = x^3$$

(次ページに続く)