

### 問題9 物理数学 (100点)

以下の問い(問1~問5)に答えよ。解答用紙には計算の途中過程も書くこと。

問1 3次元直交直線座標系 $(x, y, z)$ を考える。スカラー $\phi$ およびベクトル $A = (A_x, A_y, A_z)$ に関して、以下の(1), (2)の関係式が成立することを証明せよ。

$$(1) \quad \nabla \cdot (\phi A) = (\nabla \phi) \cdot A + \phi (\nabla \cdot A)$$

$$(2) \quad \nabla \times (\nabla \times A) = \nabla (\nabla \cdot A) - \nabla^2 A$$

問2 以下の(1), (2)の常微分方程式の一般解を求めよ。ただし、 $e$ は自然対数の底とする。

$$(1) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 2y = 0$$

$$(2) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 2y = 3e^{2x}$$

問3 次の常微分方程式が完全形であることを示し、一般解を求めよ。

$$(2x - 5y) \frac{dy}{dx} = -(3x + 2y)$$

問4 次の行列を対角化せよ。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$$

問5 次に示す周期 $2\pi$ の関数 $f(x)$ をフーリエ級数で表せ。

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (-\pi < x < -\frac{\pi}{2}) \\ 1 & (-\frac{\pi}{2} < x < +\frac{\pi}{2}) \\ 0 & (+\frac{\pi}{2} < x < +\pi) \end{cases}$$