平成２８年度
九州大学大学院理学府
修士課程地球惑星科学専攻
入学試験問題

（全１７ページ）

（２００点）

注意事項

(1) 次の配布物が正しく配られていることを確認すること。
　問題冊子　１冊
　解答用紙　２枚

(2) この問題冊子には，合計９題が出題されている。

問題１　地質学	**問題２　古環境学・古生物学**	**問題３　岩石学・鉱物学**
問題４　一般化学	**問題５　地球化学**	**問題６　熱力学**
問題７　力学	**問題８　電磁気学**	**問題９　物理数学**

(3) **第１志望・第２志望ともに**，岩石循環科学，地球進化史，古環境学，惑星系形成進化学，有機宇宙地球化学，無機生物圏地球化学，地球惑星物質科学，地球外物質学，地球惑星博物学の各研究グループを志望する受験生は，９問題のなかから任意に２問題を選択すること。

(4) **第１志望または第２志望で**，太陽地球系物理学，宇宙地球電磁気学，大気流体力学，気象学・気候力学，地球深部物理学，地球内部ダイナミクス，観測地震・火山学の各研究グループを志望する受験生は，**問題６～問題９**（上記の下線を引いた問題）のなかから少なくとも１問題を含む，合計２問題を選択すること。下線を引いた問題以外から２問題を選択した場合は，無効（０点）とするので注意すること。

(5) 解答は，問題毎に別の解答用紙を用い，枠内に記入すること（裏面使用可）。

(6) 二枚の解答用紙にそれぞれ，受験番号，氏名，選択した問題の番号を記入すること。

(7) この問題冊子は持ち帰ってよい。

問題１　地質学　（100 点）

以下の問い（問１，問２）に答えよ。

問１　次の文章を読んで，設問（１）～（６）に答えよ。

河川は供給源から砕屑粒子を平野や海に運んでいる。山地から海岸線に至る河川に関連する堆積環境は，４つに分類できる。（　A　）は河川が山地から平野や盆地に移るところに見られる。（　B　）は河道が分散して一定せず，植生に乏しい場所に広く発達する。（　C　）は大陸の海岸平野などに多く分布し，三日月湖などを形成する。（　D　）は河口付近の土砂が堆積することで発達する。

急傾斜の山地では，大雨や地震の際に土石流が発生し大量の土砂が運搬される。また，大量に降り積もった火山灰などの火山砕屑物は，洪水により大規模な土石流となって流れ下り，下流に大きな被害をもたらす。

（１）文中の空所（　A　）～（　D　）に最もよくあてはまる語句を下記の語群より選択せよ。また，その日本語訳も記せ。

braided stream,　sabkha,　fan delta,　deep sea fan,
turbulent flow,　alluvial fan,　continental slope,　reef,
meandering stream,　laminar flow,　slumping,　foreshore,

（２）（　A　）で堆積作用が起きる理由を述べよ。

（３）（　C　）を図示し，侵食および堆積作用が起きる場所の名称を答えよ。

（４）（　D　）が海側へ前進していった場合，そこで見られる岩相の層序変化の特徴を説明せよ。

（５）土石流の英語名を記し，その特徴を述べよ。

（６）下線で示したような火山砕屑物が洪水により二次的に流れ下る現象の名称を記せ。

（ 次ページに続く ）

問２　古生代の地層が分布する山地の地質調査を行い，３地域の地質図（ Ａ～Ｃ ）と断面図（ Ｄ～Ｆ ）を作成した。地質図のｘ，ｙが断面の位置を示す。岩相と層序は３地域とも共通であった。以下の設問（１）～（５）に答えよ。

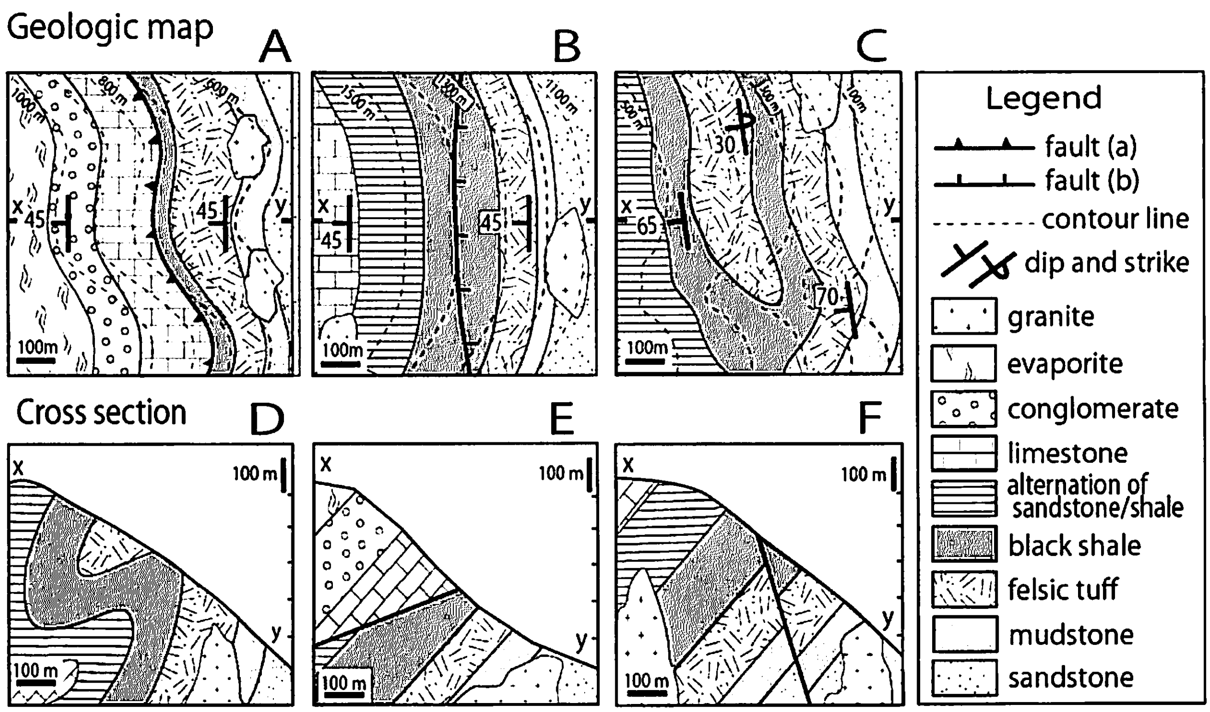


図　　調査地域の地質図と断面図

（１）　地質図 A, B, C に対応する断面図を D, E, F から選択し，記号で記せ。

（２）　地質図 A, B に出てくる断層（a），（b）について，断層の種類を記せ。

（３）　断層の動いた方向を推定するためには，断層面に残る線状の構造の観察が重要である。この線状の構造の名称を述べよ。

（４）　地質図 A の断層では幅５mほどの断層破砕帯中にシュードタキライトが見つかった。この岩石の特徴と成因を簡潔に記せ。

（５）　本調査地域における地層の堆積した年代（数値年代）を求めたい。地質図 B 地域において年代測定が可能な地層を選び，その測定法を述べよ。

問題２　古環境学・古生物学（１００点）

以下の問い（問１〜問３）に答えよ。

問１　次の文を読んで設問（１）〜（３）に答えよ。

顕生累代における最大の石炭形成期である石炭紀は，(a)シダ植物の巨木の森が発達し，(b)大型化した昆虫や節足動物が繁栄した時代として知られる。また光合成により生産される酸素と比べ，有機炭素の分解で消費される酸素が少なかったために，(c)大気中の酸素濃度は現在よりもはるかに高く３０％以上であったと推定されている（図１）。

（１）下線部（ａ）について，石炭紀における代表的な植物を一つ挙げよ。

（２）下線部（ｂ）について，石炭紀に昆虫や節足動物が大型化した理由を８０字程度で記せ。

（３）下線部（ｃ）について，大気中の酸素濃度が増加していくと負のフィードバックにより増加が抑制される。そのフィードバックとして考えられている内容を１００字以内で説明せよ。

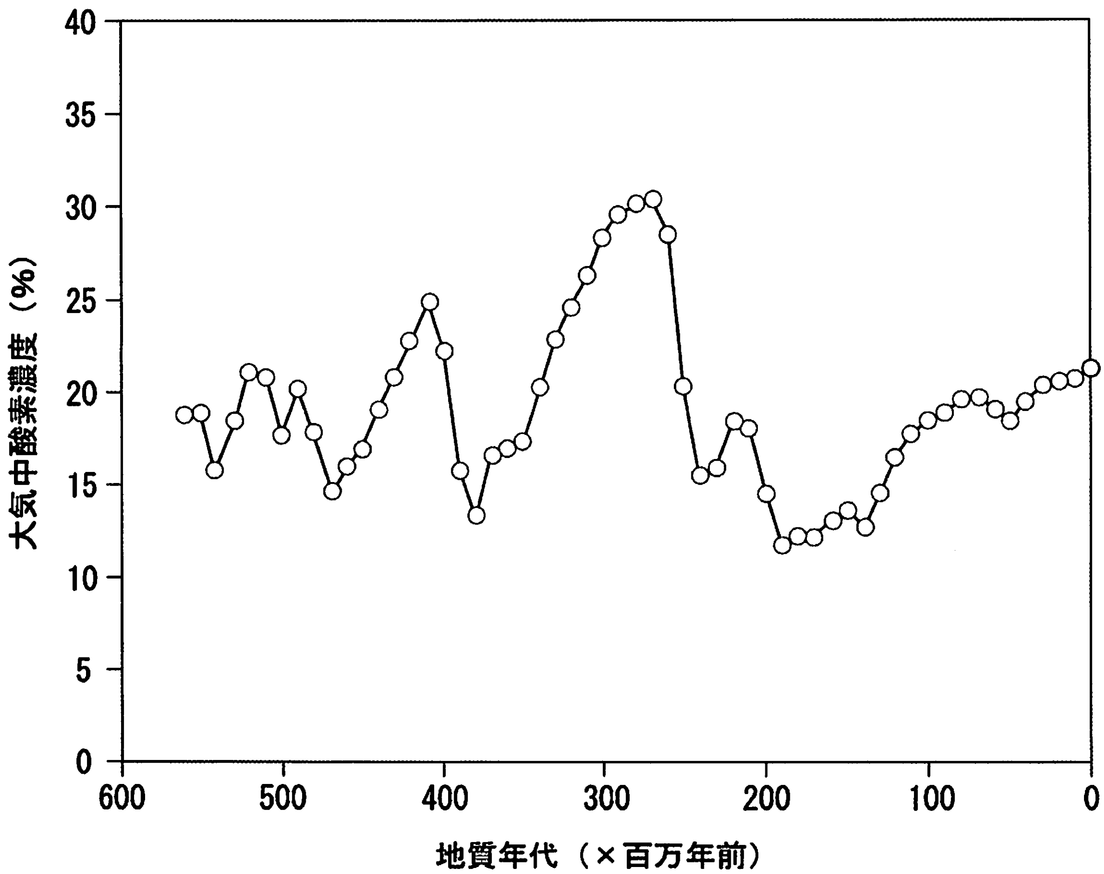


図１　顕生累代における大気中酸素濃度の時代変化（Berner, 2006 を改変）

（　次ページにつづく　）

問２　化石記録から地球史における生物多様性変化が調べられてきた。その代表例として，**図２**に Sepkoski (1981) による顕生累代における海生動物の科数の時代変化を示した。
これについて設問（１），（２）に答えよ。

（１）図中の Cm, Pz, Md はそれぞれカンブリア紀型動物群，古生代型動物群，現代型（中生代～新生代型）動物群を示す。Cm, Pz, Md の代表的な化石生物を一つずつ挙げよ。

（２）化石記録から生物の多様性を議論する際に注意しなければならない点を説明せよ。

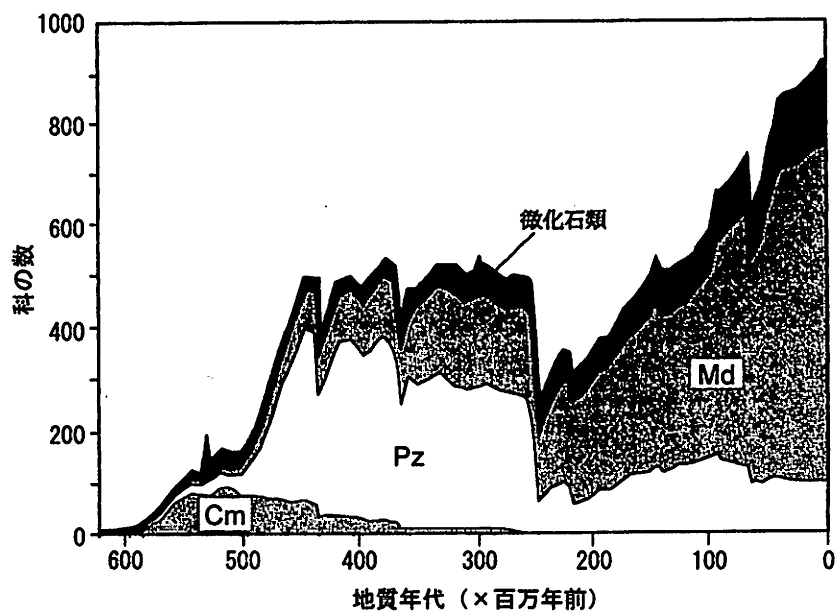


図２　顕生累代における海生動物の科数の時代変化（Sepkoski, 1981 を改変）

問３　次の８つの用語から４つを選び，それぞれ５０字程度で説明せよ。

（１）斉一説
（２）地層累重の法則
（３）化石による地層同定の法則
（４）漂流岩屑（Ice rafted debris）
（５）テチス海
（６）埋没林
（７）放散虫
（８）ベレムナイト

問題3　岩石学・鉱物学（100 点）

以下の問い（**問1，問2**）に答えよ。

問1　次の文を読んで，以下の設問（1）～（4）に答えよ。

地球中心核の主成分である金属鉄の結晶構造は，温度や圧力に応じて変化する。例えば，常温常圧下で鉄は(a)体心立方構造をとるが，常圧下で昇温すると約 910℃で面心立方構造に変化し，また常温下で加圧すると約 13 万気圧で(b)六方最密構造に変化する。一方で，マントルや地殻を構成する鉱物のほとんどは，酸素を陰イオンとするイオン結晶であり，その結晶構造の安定性はポーリング則に従っている。その第１則は各陽イオンの周りにつくられる陰イオンの配位多面体に関するもので，(c)配位数が陽イオンと陰イオンの半径比によって決まることが示されている。また第２則は両イオン間の静電結合力に関するもので，(d)各陰イオンの負電荷は隣接する陽イオンの正電荷によってつり合わなければならないことが示されている。

（１）下線部(a)について，体心立方格子の充填率を計算過程も含めて有効数字２桁で解答せよ。

（２）下線部(b)について，地球の内核においても鉄は六方最密構造をとると考えられている。内核が純粋な鉄のみで構成され，その密度が 13.0 g/cm^3 であるとき，鉄の単位格子の体積はいくらになるか，計算過程も含めて有効数字２桁で解答せよ。ただし，六方最密構造の単位格子には２つの原子が含まれており，鉄の原子量を 55.9，アボガドロ定数を 6.02×10^{23} mol^{-1} として計算せよ。

（３）下線部(c)について，陽イオンの半径を Rc，陰イオンの半径を Ra としたとき，陽イオンが６配位をとることが可能な半径比 Rc/Ra の最小値を，計算過程も含めて有効数字２桁で解答せよ。

（４）下線部(d)について，たとえばカンラン石の結晶構造では各酸素のまわりに１個の Si イオンと３個の Mg イオンが隣接している。これらの静電結合力の和を求め，この構造において第２則が成り立っていることを説明せよ。

（次ページに続く）

問２　マントルカンラン岩に関する以下の設問（１）～（５）に答えよ。

（１）図１に超苦鉄質岩の分類図を示す。この図の A，B，C に相当する鉱物名と MgO-SiO_2-CaO 系における化学式を答えよ。

（２）マントル捕獲岩として産出する頻度が多く，上部マントルの主要な岩石と考えられるものは何か。図１の岩石名から２つ挙げよ。

（３）図２にマントルカンラン岩の相平衡図の概略を示す。この図の D，E には，カンラン岩に含まれる Al_2O_3 に富む鉱物名が入る。それぞれの鉱物名と MgO-SiO_2-CaO-Al_2O_3 系における化学式を答えよ。

（４）あるマントル捕獲岩の薄片を観察すると，E の鉱物の周りにザクロ石の反応縁が形成されていた。地下深部においてこの岩石にどのような温度・圧力の変化が生じたと考えられるか説明せよ。

（５）設問（４）で起こった反応を MgO-SiO_2-CaO-Al_2O_3 系の反応式で示せ。ただしザクロ石の化学組成は $Mg_2CaAl_2Si_3O_{12}$ とする。

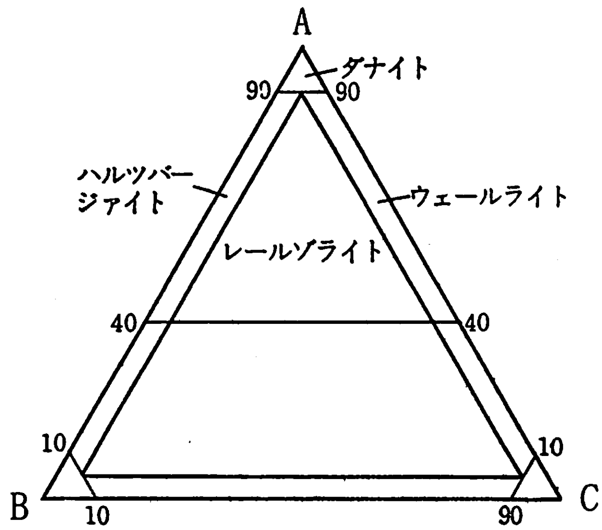


図1　超苦鉄質岩類の分類

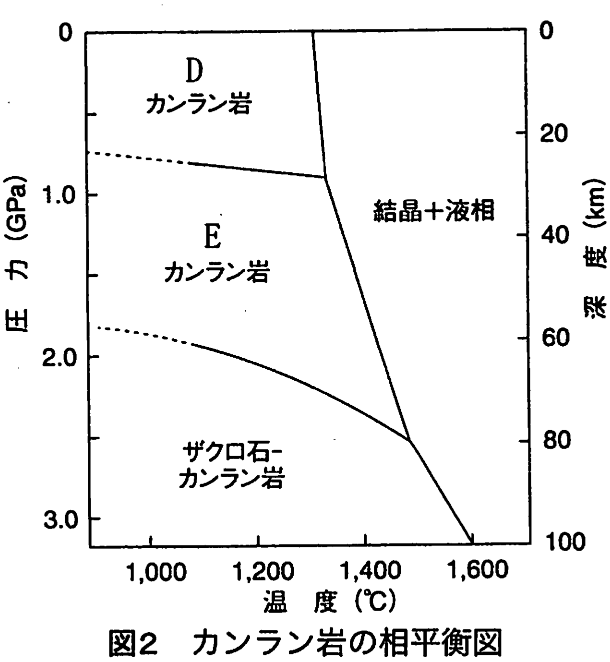


図2　カンラン岩の相平衡図

問題4　一般化学（100 点）

以下の問い（**問 1 ～問 3**）に答えよ。

問 1　原子中の電子は基底状態において，エネルギー準位の低い方から順に埋まっていく。その電子配置は，たとえば，ベリリウム（Be）は $(1s)^2(2s)^2$，チタン (Ti) は $(1s)^2(2s)^2(2p)^6(3s)^2(3p)^6(3d)^2(4s)^2$ のように表すことができる。次の設問（1）～（4）に答えよ。

（1）アルミニウム（Al），カリウム（K），鉄（Fe）の電子配置をそれぞれ記せ。

（2）$(1s)^2(2s)^2(2p)^5$ で表せる原子が陽イオンになりやすいか，陰イオンになりやすいか，イオン価もあわせて答えよ。

（3）d 軌道に電子がないか，d 軌道が完全に埋まっている原子を何元素というか答えよ。

（4）電子軌道を考慮して，遷移元素の特徴を説明せよ。

問 2　原子が何個か結合して分子をつくる。酸素原子同士が結合して酸素 (O_2) やオゾン（O_3）の分子となり，酸素原子が炭素原子と結合して一酸化炭素（CO）や二酸化炭素（CO_2）となる。次の設問（1）～（4）に答えよ。

（1）O_2 と O_3 の関係を何というか答えよ。

（2）O_2 は常磁性を示す。その理由を説明せよ。

（3）O_3 の分子構造は右図に示すように直線ではない。また，O_3 の O-O の結合距離は 127 pm であり，O_2 の O-O の結合距離 121 pm よりも長い。O_3 がこのような分子構造をとる理由を説明せよ。

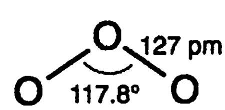


図　O_3 の分子構造

（4）CO と CO_2 のそれぞれの CO 間の結合距離はどちらが長いか，理由とともに記せ。

（次ページに続く）

問３　化学反応における酸化と還元は酸素や電子の授受で定義することができる。次の設問（１）～（４）に答えよ。

（１）以下の酸化還元反応について，それぞれの元素の反応前後における酸化数の変化を記せ。

$$4\,Fe + 3\,O_2 \rightarrow 2\,Fe_2O_3$$

（２）以下の酸化還元反応における電子の授受を明らかにせよ。

$$CuO + H_2 \rightarrow Cu + H_2O$$

（３）以下の２つの反応 a），b）における標準電極電位 E^0（V）を利用して，水の存在下における O_2 と F_2 の酸化還元平衡を説明せよ。

a）$O_2 + 4\,H^+ + 4\,e^- \rightarrow 2\,H_2O \qquad E^0 = 1.229$

b）$F_2 + 2\,e^- \rightarrow 2\,F^- \qquad E^0 = 2.87$

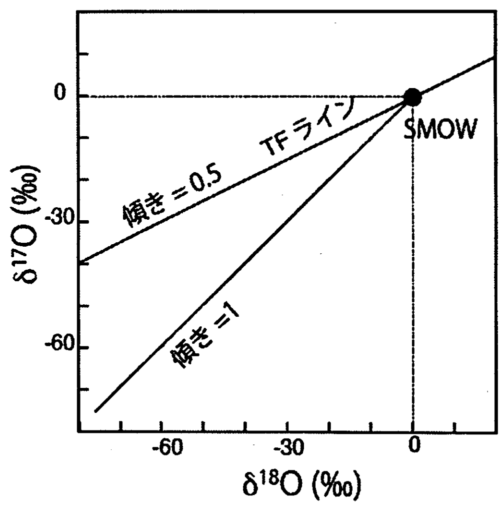
（４）酸化還元における不均化の具体例を化学反応式を用いて説明せよ。

問題5　地球化学（100 点）

以下の問い（問1，問2）に答えよ。

問1　次の文章を読み，以下の設問（1）～（4）に答えよ。

右図は酸素のスリーアイソトーププロットと呼ばれ，試料中の酸素の $\delta^{17}O$ 値を $\delta^{18}O$ 値に対してプロットしたものである。その際，SMOW を標準物質に用いるのが慣例である。地球の試料では，常に SMOW を通る TF ラインと呼ばれる傾きほぼ0.5の一本の線上にプロットされる。



一方，あるタイプの隕石に含まれる CAI から分離した非含水鉱物（無水鉱物）の場合には，傾きほぼ 1 の直線上にプロットされる。これは，^{16}O のみが多い太陽系の平均の酸素と ^{16}O のみが少ない水分子の酸素が，太陽系内で様々な割合で混合したことによると考えられている。

（1）SMOW，CAI についてそれぞれ 100 字以内で説明せよ。

（2）TF ラインの傾きがほぼ 0.5 になる理由を記せ。ただし，同位体効果をキーワードに含めよ。

（3）スリーアイソトーププロットは隕石の由来した天体の判別に広く用いられている。その理由を 50 字程度で記せ。

（4）^{16}O のみが増減すると傾きほぼ 1 の直線ができることを調べてみよう。そのために，SMOW とほぼ同じ同位体組成を持つ物質に対し ^{16}O の個数のみを増減させた時，$\delta^{17}O$ 値と $\delta^{18}O$ 値がほぼ等しくなることを示せばよい。空欄（ア）～（ク）を埋め，$\delta^{17}O$ 値と $\delta^{18}O$ 値が等しくなることを示せ。

	SMOW	増加	減少
^{16}O の個数	1000000	1020000	980000
^{17}O の個数	373	373	373
^{18}O の個数	2005	2005	2005
$^{17}O/^{16}O$	373×10^{-6}	（ア）	（オ）
$^{18}O/^{16}O$	2005×10^{-6}	（イ）	（カ）
$\delta\,^{17}O$	0 ‰	（ウ）‰	（キ）‰
$\delta\,^{18}O$	0 ‰	（エ）‰	（ク）‰

（次ページに続く）

問２ 次の表は，海水，河川水，地下水，雨水の代表的な元素組成（mmol/kg）をまとめたものである。この表について，以下の設問（１）～（５）に答えよ。

	海水	(ケ)	(コ)	(サ)
Na	470	1.3	0.3	0.1
Mg	53	0.3	0.2	0.01
Cl	550	0.6	0.2	0.1
K	10	0.1	0.06	0.01
Ca	10	1.0	0.4	0.002
Si	0.1	0.3	0.2	<0.002
S	28	0.3	0.2	0.01

（１）（ケ）～（サ）に河川水，地下水，雨水をあてはめよ。

（２）表中の元素のうち，表層の海水と深層の海水では濃度が大きく異なる元素は何か。そのような違いが生じる理由とともに答えよ。

（３）天然水（コ）中の Na と Ca は，主に下記の三つの鉱物の風化反応によって供給される。（シ）と（ス）に当てはまるイオンをイオン式で記せ。

$$CaCO_3 + H^+ \rightarrow \text{(シ)} + \text{(ス)} \qquad \text{(A)}$$

$$CaAl_2Si_2O_8 + 2H^+ + H_2O \rightarrow Al_2Si_2O_5(OH)_4 + Ca^{2+} \qquad \text{(B)}$$

$$2NaAlSi_3O_8 + 2H^+ + H_2O \rightarrow Al_2Si_2O_5(OH)_4 + 2Na^+ + 4SiO_2 \qquad \text{(C)}$$

（４）式(A), (B), (C)中の H^+ は二酸化炭素の溶解と酸解離によって作られる。式(C)の左辺中の H^+ を CO_2 に置き換えた式を完成させ，解答欄に記せ。

（５）Na や Ca は，風化反応の他に海塩粒子（海水の飛沫が乾燥したもの）の溶解によっても供給される。天然水（コ）の Na のうち，海塩粒子の溶解による Na の割合，風化反応に由来する Na の割合を，それぞれ求めよ。

問題６　熱力学（100点）

以下の問い（問１，問２）に答えよ。ただし，圧力を p，温度を T，体積を V，内部エネルギーを U，エントロピーを S とおく。

問１　系の内部エネルギーは系に加える熱 $d'Q$ と仕事 $d'W$ の総和だけ増加する。熱と仕事のうち，一方をゼロとした時の圧力変化による温度変化率を比較しよう。以下の文中の $\boxed{\ 1\ }$ ～ $\boxed{\ 11\ }$ に入る数式あるいは数字を答えよ。

(a) ３つの状態量，p, T, V の間に状態方程式が成立するため，１つは残り２つの関数となる。いま，p, T を独立変数とすると V の全微分は $dV =$ $\boxed{\ 1\ }$ と表わされる。$dV = 0$ とおけば $(\partial T/\partial p)_V =$ $\boxed{\ 2\ }$ となり次式が成立することがわかる。

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T = \boxed{\ 3\ } \tag{1}$$

(b) 加える仕事は準静的過程では $\boxed{\ 4\ }$ と表わされるので，熱力学第一法則より，加える熱は U と $\boxed{\ 4\ }$ を用いて次のように表わされる。

$$d'Q = \boxed{\ 5\ } \tag{2}$$

U を T と V の関数とおき，(2)式に代入すると $d'Q =$ $\boxed{\ 6\ }$ $dT +$ $\boxed{\ 7\ }$ dV となる。$\boxed{\ 6\ }$ は定積熱容量 C_V である。従って，定圧熱容量 C_p は次のように表わされる。

$$C_p = C_V + \boxed{\ 7\ } \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \tag{3}$$

(c) C_p は別の表現もできる。U と V をどちらも T, p の関数とおき，(2)式に代入すると加える熱は次のように表わされる。

$$d'Q = \boxed{\ 8\ }\, dT + \boxed{\ 9\ }\, dp \tag{4}$$

（次ページに続く）

(4)式の $\boxed{\ 8\ }$ は C_p である。また，

$$\left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)_T = \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T$$

の関係を $\boxed{\ 9\ }$ に代入すると(4)式は次のようになる。

$$d'Q = C_p\, dT + \boxed{\ 7\ } \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T dp \qquad (5)$$

(5)式の $\boxed{\ 7\ }$ を(3)式を用いて消去すると，$d'Q = \boxed{\ 10\ }$ となる。さらに(1)式を代入すると，断熱過程での圧力変化による温度変化率$(\partial T/\partial p)_{断熱}$と，仕事なし（$dV = 0$）での変化率$(\partial T/\partial p)_V$との関係が次式のように表わされる。

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_{断熱} = \boxed{\ 11\ } \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V \qquad (6)$$

問２　熱力学関数について以下の設問 (a)～(d) に答えよ。

(a) 次の関係が成立することを導け。

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T - p$$

(b) 次のマクスウェルの関係を導け。ヒント：ヘルムホルツ自由エネルギー $F\,(= U - TS)$ を用いるとよい。

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T$$

(c) 理想気体について，設問 (a), (b) の関係を用いて$(\partial U/\partial V)_T$を求めよ。

(d) 設問 (c) で求められた式が理想気体の内部エネルギーについて表現していることを説明せよ。

問題7　力学（100 点）

以下の問い（問１，問２）に答えよ。

問１　自然長 l_0, ばね定数 k を持つばねを用意し，図１のように水平面から角度 θ をなす斜面にばねの上端を固定した。下端には質量 m の物体を取り付けた。また，鉛直方向下向きに一定の大きさ g を持つ重力加速度が働いている。図１に示したように斜面に沿って上向きに x 軸をとる。以下の設問（１）～（９）に答えよ。ただし，物体は質点として扱ってよい。また，斜面と物体との摩擦は無視できるとする。

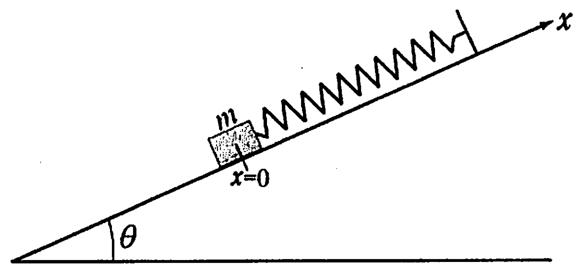


図１ 斜面でばねにつながった質点の運動

（１）今，物体は重力とばねから受ける力によって釣り合い静止している。このとき，自然長からのばねの伸びの長さ δx を求めよ。

（２）図のように物体が釣り合っている位置を $x=0$ とした場合の運動方程式を x の時間 t に関する微分方程式の形で示せ。

（３）設問（２）で導出した運動方程式の一般解を求めよ。

（４）時刻 $t=0$ で，物体をばねの釣り合いの位置から $x=x_0$ に移動させ，x 成分の初速度 $v=v_0$ を与えて手を離した。この場合の物体の位置 x と速度の x 成分 v を時間 t の関数として示せ。

（５）設問（４）の条件を与えたときの物体の位置 x の最大値 x_{max} を求めよ。

（６）この運動での物体の運動エネルギーを時間 t の関数として表せ。

（７）$x=0$ を基準としたときの，この運動のばねのポテンシャルエネルギーを時間 t の関数として表せ。

（８）この運動の重力の位置エネルギーを時間 t の関数として表せ。

（９）全エネルギー（力学的エネルギー）を求めよ。

（次ページに続く）

問2 宇宙空間に質量 m_1 の質点Aが存在している。また，時刻 $t=0$ において質点Aから距離 $R=r_0$ 離れた場所に微小な質量 m_2 の質点Bを配置する。$t=0$ における質点A, Bの速度は0である。$t>0$ で質点Bは質点Aの重力のみを受けて落下する。また，質点Aの質量は質点Bの質量より十分に大きい($m_1 \gg m_2$)ために，質点Aの位置は変化しないとする。万有引力定数を G として，以下の設問(1)～(5)に答えよ。

(1) 時刻 $t=0$ に，質点Bが質点Aに対して持つ位置エネルギーを示せ。ただし，無限遠方を基準とせよ。

(2) 質点Bが落下し，$R=a$ になった時の速さを v として質点Bが持つ力学的エネルギーを，a と v を用いて示せ。

(3) エネルギー保存則を用いて任意の位置 $R=r$ での質点Bの速さを示せ。

(4) 設問(3)の結果を用いて質点Bが質点Aの位置に到達するまでの時間を計算せよ。このとき，$r=r_0\cos^2\theta$ と変換すると式が簡単になるので用いてもよい。

(5) 次に，質点Bを質点Aに対して図2のように配置し，大きさ v_0 の初速度を与えた。質点Bが質点Aに対して持つ角運動量の大きさを導出せよ。ただし，図のように b を定義した。

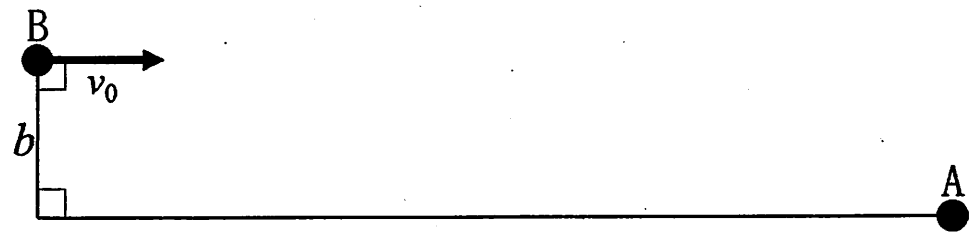


図2 初速度を与えた場合の質点（設問（5））の運動

問題８　電磁気学　（100 点）

以下の問い（問１～問３）に答えよ。

問１　次の文を読み，設問(1)～(4)に答えよ。

電場を$\boldsymbol{E}$，磁束密度を$\boldsymbol{B}$，電荷密度をρ，伝導電流密度ベクトルを$\boldsymbol{j}$で表現する。また電束密度を$\boldsymbol{D}$, 磁場を$\boldsymbol{H}$としたとき，マクスウェル方程式の微分形は以下の形式で与えられる。

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho \tag{1.1}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=(\text{ア}) \tag{1.2}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0 \tag{1.3}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=(\text{イ}) \tag{1.4}$$

(1)　(1.2)式, (1.4)式の右辺(ア), (イ)に入る式を記せ。ただし，ここにあげた物理量は全て時間と空間の関数とする。

(2)　(1.1)式にガウスの発散定理を適用して，閉曲面 S で囲まれた体積領域 V を貫く全電束が，曲面内部に蓄えられた全電荷量Qによってのみ決定されることを示せ。

(3)　(1.1)式から(1.4)式のいくつかを適当に組み合わせて，電流保存則を導出せよ。

(4)　(1.2)式にストークスの定理を適用して，任意の曲面 S を貫く磁束Ψと，その S の外周 C にそって働く誘導起電力εの関係式を導出し，その物理的意味を述べよ。

問２　次の文を読み，設問(1)～(3)に答えよ。

$\nabla\times\boldsymbol{E}=0$を満たす渦なしの電場を静電場といい，$\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi$のように，ポテンシャル$\varphi$の勾配で記述することができる。

導体とは電場がかかると電流が自由に流れることが出来る物質である。したがって，電流が流れていない静的平衡状態では, 電場$\boldsymbol{E}$は導体内部の至るところで 0 である。すなわち，導体において電荷が存在できる領域は，その表面のみであり，孤立した導体の表面は等電位となっていなければならない。

（次ページに続く）

(1)　真空中に蓄えられる電場のエネルギーは$U=\frac{1}{2}\int_V \varepsilon_0 |\boldsymbol{E}|^2 dV$ で与えられる。電場が静電場のとき

$$U=\frac{1}{2}\int_V \rho\varphi \, dV$$

となることを示せ。ただし V は電場が拡がる体積領域，ρは電荷密度，ε_0は真空中の誘電率であり，電束密度 $\boldsymbol{D}$ と電場 $\boldsymbol{E}$ の間には$\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}$ の関係があるものとする。

(2)　表面電荷が，$+Q$，$-Q$，表面の静電ポテンシャルがφ_1, φ_2であるような任意の形をした孤立した導体を考える。この二つの導体が作る静電エネルギーを求めよ。

(3)　電気容量 $C_1, C_2, ..\ C_N$ を各々持つ N 個のコンデンサーが導線によって接続されている閉回路を考える。N 個のコンデンサーが直列に接続されている場合と，並列に接続されている場合の合成容量を，それぞれ導出せよ。

問３　次の文を読み，設問(1)～(3)に答えよ。

電流 I が流れる導線上にコイル素子を連結した回路を考える。このコイルを貫く磁束が，$\Psi=LI$ で与えられるとき，L をこの回路素子における自己インダクタンスという。このとき誘導起電力εは$\varepsilon=-L\frac{d}{dt}I$で与えられる。

(1)　自己インダクタンス L をもつ一個のコイルに電源をつないで電流を流すことを考えよう。電源の起電力を V，コイルの抵抗を R としたとき，電流 I と Vの満たす関係式を求めよ。

(2)　さらに電気容量 Cのコンデンサーを直列に接続する。コンデンサーに蓄えられている電荷をQとした場合の I と Vの関係を求めよ。

(3)　設問(2)の状況において時間変化する電流Iが流れているときに電源が単位時間あたりにする仕事 Wを求め，各項の物理的意味を説明せよ。ただし，必要に応じて，回路を流れる電流 I とコンデンサーに蓄えられる電荷Q の間には$I=dQ/dt$ が成り立つことを用いてよい。

問題９　物理数学（100 点）

以下の問い（問１～問５）に答えよ。解答用紙には計算の途中過程も書くこと。

問１　３次元直交直線座標系(x, y, z)を考える。スカラー$\boldsymbol{\Phi}$およびベクトル$\boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z)$に関して，以下の（１），（２）の関係式が成立することを証明せよ。

（１）　$\nabla \cdot (\Phi \boldsymbol{A}) = (\nabla \Phi) \cdot \boldsymbol{A} + \Phi (\nabla \cdot \boldsymbol{A})$

（２）　$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla^2 \boldsymbol{A}$

問２　以下の（１），（２）の常微分方程式の一般解を求めよ。ただし，e は自然対数の底とする。

（１）　$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 2y = 0$$

（２）　$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 2y = 3\,e^{2x}$$

問３　次の常微分方程式が完全形であることを示し，一般解を求めよ。

$$(2x - 5y)\frac{dy}{dx} = -(3x + 2y)$$

問４　次の行列を対角化せよ。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$$

問５　次に示す周期 2π の関数$f(x)$をフーリエ級数で表せ。

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (-\pi < x < -\frac{\pi}{2}) \\ 1 & (-\frac{\pi}{2} < x < +\frac{\pi}{2}) \\ 0 & (+\frac{\pi}{2} < x < +\pi) \end{cases}$$