## 問題7　力学（100点）

以下の問い（問１～問３）に答えよ。

**問１**　デカルト座標系 $(x,y,z)$ における質量 $m$ の質点の運動について考える。この座標系における $x$，$y$ および $z$ 方向の基本ベクトル（座標軸方向の単位ベクトル）をそれぞれ，$\vec{e}_x$，$\vec{e}_y$ および $\vec{e}_z$ で表す。質点に働く力が時間 $t$ の関数

$$\vec{F}(t)=F_0\left\{\cos(\omega t)\vec{e}_x+\cos(2\omega t)\vec{e}_y+\sin(\omega t)\vec{e}_z\right\}$$

（ただし、$\omega>0$）で与えられているとしよう。初期 $t=0$ における速度を $\vec{v}_0$ とする。時刻

$$t_1=\frac{\pi}{2\omega}$$

における速度 $\vec{v}_1$ を $m$，$F_0$，$\omega$，$\vec{e}_x$，$\vec{e}_y$，$\vec{e}_z$ および $\vec{v}_0$ のうち必要なものを用いて表せ。

**問２**　以下の文を読んで設問（１）～（６）に答えよ。

質量 $m$ の質点のポテンシャル（位置エネルギー）が，位置ベクトル $\vec{r}$ の関数として

$$U(\vec{r})=a\vec{r}^{\,2}+\vec{A}\cdot\vec{r}$$

という式で与えられる場合を考える。ここで $a$ は正の定数，$\vec{A}$ は定ベクトルであり，$\vec{r}^{\,2}=\vec{r}\cdot\vec{r}$ である。

（１）質点に働く力 $\vec{F}$ を，$a$，$\vec{A}$ および $\vec{r}$ を用いて表せ。

（２）$\vec{F}=\vec{0}$ となる点の位置ベクトル $\vec{r}_0$ を，$a$ および $\vec{A}$ を用いて表せ。

（３）$\vec{R}=\vec{r}-\vec{r}_0$ とおくと，運動方程式は，時間 $t$ に関する２階の常微分方程式

$$\ddot{\vec{R}}+\omega^2\vec{R}=\vec{0}\quad\cdot\cdot\cdot\text{①}$$

に書き換えられる。$\omega$ を，$a$ および $m$ を用いて表せ。ただし $\omega>0$ とする。

（４）常微分方程式 ① の一般解を求めよ。問題文にない記号を用いる場合は，定義を記すこと。

（５）初期に原点 $\vec{r}=\vec{0}$ で静止していた質点の，時刻 $t$ における位置ベクトル $\vec{r}$ と速度 $\dot{\vec{r}}$ を，$t$，$m$，$a$，および $\vec{A}$ のうち必要なものを用いて表せ。

（６）設問（５）の場合の，運動エネルギーの最大値，および位置エネルギーの最小値を，$m$，$a$，$\vec{A}$ のうち必要なものを用いて表せ。

（ 次ページに続く ）