

問題8 物理数学 (100点)

以下の問い (問1~問5) に答えよ。解答用紙には計算の途中経過も書くこと。

問1 変数  $x, y, z$  の間に, 関数関係  $z = F(x, y)$  が存在するとき, 以下の式が成り立つことを示せ。

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1$$

問2 3次元直交直線座標系  $(x, y, z)$  のスカラー関数  $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$  について設問 (1) ~ (3) に答えよ。ただし,  $x^2 + y^2 + z^2 \neq 0$  とする。

- (1)  $\nabla f$  を計算せよ。
- (2)  $\nabla \cdot (\nabla f)$  を計算せよ。
- (3)  $\nabla \times (\nabla f)$  を計算せよ。

問3 次の行列について設問 (1) ~ (4) に答えよ。

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- (1) 固有値を求めよ。
- (2) 対応する大きさ1の固有ベクトルを求めよ。
- (3) 行列を対角化せよ。
- (4) 逆行列の固有値を求めよ。

問4 次の常微分方程式が完全形であることを示し, その一般解を求めよ。

$$(y^2 e^x + x e^{-y}) dx + \left( 2y e^x - \frac{1}{2} x^2 e^{-y} \right) dy = 0$$

問5 次の周期  $2\pi$  の関数  $f(x)$  をフーリエ級数で表せ。

$$f(x) = |\sin x| \quad (-\pi < x \leq \pi)$$